

Twierdzenie 1 *Następujące własności ciągów są równoważne:*

1. *Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*
2. *Każdy ciąg Cauchy jest zbieżny.*
3. *Każdy ciąg ograniczony posiada podciąg zbieżny. (Bolzano–Weierstrass)*

Zamiast całego dowodu wykażemy tutaj tylko wynikanie $2 \Rightarrow 3$. Niech (a_n) będzie ciągiem ograniczonym, czyli $|a_n| < M$ dla pewnego M . Mamy wybrać podciąg (a_{n_k}) zbieżny. Metoda wyboru jest następująca: dzielimy przedział $[-M, M]$ na połowy. Co najmniej w jednej z nich jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Niech a_{n_1} będzie którymkolwiek z a_n należących do tej połowy. Wybraną połowę dzielimy znowu na połowy i stwierdzamy, że w co najmniej jednej z nich jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Jako a_{n_2} wybieramy którykolwiek z wyrazów ciągu należący do tej połowy (a właściwie ćwiartki), z tym tylko warunkiem, żeby jego numer n_2 był większy od n_1 (dlaczego). Ponieważ wyrazów a_n w wybranej części było nieskończenie wiele, zawsze takie a_{n_2} można znaleźć. Dalsze wyrazy podciągu wybieramy w analogiczny sposób. Zauważmy, że po wykonaniu N kroków wszystkie następne wyrazy podciągu będziemy wybierali z odcinka o długości $M/2^N$. Wobec tego wyrazy wybranego podciągu spełniają warunek: jeżeli $k, l > N$, to

$$|a_{n_k} - a_{n_l}| < \frac{M}{2^N}.$$

Ponieważ dla każdego $\epsilon > 0$ można znaleźć takie N , że $M/2^N < \epsilon$ (ciąg $M/2^N \rightarrow 0$), wnioskujemy, że (a_{n_k}) jest ciągiem Cauchy, a założyliśmy, że takie ciągi są zbieżne.