

## Seria zadań z rachunku różniczkowego

1. W jakim punkcie styczna do wykresu krzywej  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$  jest równoległa do osi  $OX$ ?
2. Pod jakim kątem przecinają się krzywe  $y = \sin x$  i  $y = \cos x$ ?
3. Zbadaj ciągłość i różniczkowalność funkcji w zależności od parametrów  $a, b$ :
  - a)  $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{dla } x \leq \pi/2 \\ \sin x + b & \text{dla } x > \pi/2. \end{cases}$
  - b)  $f(x) = \begin{cases} 1/|x| & \text{dla } |x| > b \\ ax^2 & \text{dla } |x| \leq b. \end{cases}$
4. Oblicz  $f^{(10)}(0)$  dla  $f(x) = x^2 \cos 2x$ .
5. Pokaż, że dla dowolnych liczb naturalnych  $m, n$  zachodzi  $2^n > (\frac{n}{m})^m$ .  
Wsk: Udowodnij, że  $2 > x^{-x}$  dla wszystkich  $x = \frac{m}{n}$ .
6. Dowieść, że:
  - a)  $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$  dla  $x > 0$ ,
  - b)  $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$  dla  $0 < x < 1$ ,
  - c)  $(4 - \cos x) \frac{\sin x}{x} < 3$  dla  $x \neq 0$ .
7. Dowieść, że funkcja  $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$  ma trzy punkty przegięcia oraz że leżą one na jednej prostej.
8. Zbadaj przebieg funkcji, naszkicuj wykres.
  - a)  $f(x) = \sin x - \sin^2 x$ ,
  - b)  $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ,
  - c)  $f(x) = (x - \frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}}$ ,
  - d)  $f(x) = (x+1) \arctan x$ ,
  - e)  $f(x) = \frac{x^2+3x+11}{\sqrt{x^2+1}}$ ,
  - f)  $\frac{|x-1|x+(x-1)|x|}{x^2-1}$ .