ZADANIA NA ĆWICZENIA 11, 12 I. 2010

ZAD 1 NIECH $\varphi: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ BĘDZIE CIĄGŁĄ FUNKCJĄ

- POKAŻ, ŻE $\displaystyle\int_0^\pi x\varphi(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \varphi(\sin x)\,dx$
- POLICZ $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x\,dx}{(1+\cos^2 x)^2}$

ZAD 2 NIECH $\displaystyle I_n := \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

- POKAŻ, ŻE (a) $I_{n-1} + I_{n+1} = \frac{1}{n}$ DLA $n>0$

  (b) $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$ DLA $n>1$

- POLICZ (a) I_{11}

  (b) I_8

ZAD 3 KORZYSTAJĄC Z DEFINICJI CAŁKI RIEMANNA OBLICZ

(a) $\displaystyle\int_1^a \frac{dt}{t}$ $(a>1)$

(b) $\displaystyle\int_0^1 dx\, x e^x$

ZAD 4 OBLICZ CAŁKĘ $\displaystyle I(x) = \int_1^x \frac{2t\log t}{(1+t^2)^2}\,dt$ $(x>1)$

SPRAWDŹ, CZY ISTNIEJE $\lim\limits_{x\to\infty} I(x)$

ZAD 5 NIECH $f(x)$ SPEŁNIA $f(x) = f(a+b-x)$ (a, b - USTALONE, $a<b$)

POKAŻ, ŻE $\displaystyle\int_a^b x f(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$

ZAD 6 DANA JEST FUNKCJA $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$

(a) ZBADAJ ISTNIENIE $\displaystyle\int_0^1 dx\, f(x)$ (STOSUJĄC ODPOWIEDNIE SZACOWANIE $f(x)$)

(b) JEŻELI $\displaystyle I = \int_0^1 dx\, f(x)$ ISTNIEJE, TO POLICZ ILE WYNOSI