1

Rozwijanie funkcji na szereg Taylora

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \qquad 0 < \theta < 1$$

dla $|x| < M$ $\quad \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e^M M^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$

stąd zbieżność jednostajna na każdym zbiorze $[-M, M]$, czyli niemal jednost.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}(x)$$

$$|R_{2n-1}(x)| = \frac{(\sin)(\cos)(\theta x)\, x^{n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{M^{n+1}}{(2n+1)!}$$

Zbieżność jednostajna na $\mathbb{R}$

$$\cos x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{4} - (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$ tak, jak dla $\sin x$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$ dla $|x| < q < 1$

< 1 $\quad n > \alpha$

$$|R_n(x)| < q^n \to 0$$

stąd zb. niemal jednost na $]-1, 1[$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{-n-1} \qquad -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

stąd zb. jednostajna