

ANALIZA II

zadania na ćwiczenia 15-19 marca

Zadanie 1. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := \frac{1}{3}(x+y)^3 - (x + \sqrt{1+x^2})y$. Sprawdzić, że f ma tylko jeden punkt krytyczny i ma w nim lokalne (lecz nie globalne) minimum. Czy taka rzecz jest możliwa dla różniczkowalnej funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x, y) := e^{-2x}(2x+y)(x^2-y)$.

- (a) Znaleźć i zbadać punkty krytyczne f ;
- (b) wyznaczyć zbiór wartości f .
- (c) Wykazać, że $g(x, y) := 4x^2 + y^2 + (xy + 3x + 5)^2 \geq 3$ dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ na obszarze X :

- (a) $X := \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := 2x^3 - 6xy + 3y^2$;
- (b) $X := \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := \frac{(x+a)y}{1+x^2+y^2}$, $a > 0$ dane;
- (c) $X := \mathbb{R}_+^3$; $f(x, y, z) := (1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{x}{y})(1 + \frac{y}{z})(1 + z)$;
- (d) $X := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $f(x, y, z) := 7xy + 2yz + 2zx - \log(x^2 + y^2 + z^2)$;
- (e) $X := \mathbb{R}_+^3$; $f(x, y, z) := x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$.