ANALIZA II

zadania na ćwiczenia 17-21 maja (a może dłużej)

Zadanie 1. Zapisać całkę $\int_D f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$ jako całkę iterowaną dwoma sposobami jeśli:

a. $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant r^2, x \geqslant 0\}$,

b. D jest kwadratem ograniczonym prostymi $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=-1$, $y-x=1$.

Zadanie 2. W poniższych całkach iterowanych zamienić kolejność całkowania

a. $\int_0^{\frac{2}{3}} \mathsf{d}x \int_{2x}^{2-x} f(x,y)\mathsf{d}y$,

b. $\int_0^1 \mathsf{d}x \int_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x,y)\mathsf{d}y + \int_1^3 \mathsf{d}x \int_{\frac{x^2}{9}}^{1} f(x,y)\mathsf{d}y$.

c. $\int_0^1 \mathsf{d}x \int_x^1 \mathsf{d}y \int_{\frac{x+y}{2}}^{2y-x} f\,\mathsf{d}z$ zapisać jako $\int \mathsf{d}z \int \mathsf{d}x \int \mathsf{d}y$ oraz $\int \mathsf{d}y \int \mathsf{d}z \int \mathsf{d}x$;

Zadanie 3. Odwracając kolejność całkowania wykazać, że

$$\int_a^b \mathsf{d}x_n \int_a^{x_n} \mathsf{d}x_{n-1} \ldots \int_a^{x_3} \mathsf{d}x_2 \int_a^{x_2} f(x_1)\mathsf{d}x_1 = \int_a^b f(x)\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}dx.$$

Zadanie 4. Obliczyć całki $\int_K f$:

a. $K = \{x^2 + y^2 \leqslant x\}$, $f = x^{-1}|y|$, (odp: $I = \frac{1}{2}$);

b. $K = \{x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$, $f = x^2\sqrt{a^2 - y^2}$, (odp: $I = \frac{32a^5}{45}$);

c. $K = \{(x^2 + y^2)^2 \leqslant 2a^2(x^2 - y^2, x \geqslant 0\}$,$f = 1$, (odp: $I = a^2$);

d. $K = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x + y + z \leqslant 1\}$, $f(x,y,z) = (1 + x + y + z)^{-3}$, (odp: $I = \frac{1}{2}(\log 2 - \frac{5}{8})$);

Zadanie 5. Korzystając ze współrzędnych biegunowych obliczyć całkę

$$\int_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\,\mathsf{d}x\,\mathsf{d}y$$

jeśli D jest górną połową koła o środku w $(0,0)$ i promieniu 1.

Zadanie 6. Używając współrzędnych

$$u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \qquad v = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

obliczyć pole powierzchni odcinka parabolicznego ograniczonego parabolą

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

i osią $0X$.

Zadanie 7. Obliczyć środek ciężkości jednorodnego obszaru płaskiego $K := \{(x,y) : x > 0, xy \geqslant 1, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqslant 2\}$ (przy $a, b > 0$, $ab > 1$ danych); sprawdzić, że leży on na prostej o równaniu $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

Zadanie 8. Znaleźć:

(a) środek ciężkości jednorodnej półkuli $\Omega := \{x + 2 + y^2 + (z-1)^2 \leqslant 1, z \leqslant 1\}$;

(b) środek ciężkości jednorodnej bryły $\Omega := \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}\}$;

(c) moment bezwładności względem osi $0z$ stożka $C := \{x^2 + y^2 \leqslant z^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ o gęstości $\rho(x, y, z) = z^2$;

(d) siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą

$$B := \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, z \leqslant 0\}$$

o gęstości $\rho = 1$, a masą punktową m umieszczoną w punkcie $(0, 0, 1)$;

(e) siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą

$$B := \{1 \leqslant z \leqslant 2, x^2 + y^2 \leqslant z^2\}$$

o masie M, a masę punktową m umieszczoną w punkcie $(0, 0, 0)$;

(f) siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą $B = \{x^2 + y^2 \leqslant 1 \leqslant z \leqslant 2\}$ o masie M, a masą punktową m umieszczoną w punkcie $(0, 0, 0)$.

(a) $(0, 0, \frac{5}{8})$; (b) $(0, 0, \frac{3}{16}(2 + \sqrt{2}))$; (c) $\frac{\pi}{14}$; (d) $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{2} - 1)mG$; (e) $\frac{3}{7}((2 - \sqrt{2})MmG$; (f) $2(1 + \sqrt{2} - \sqrt{5})MmG$.

Zadanie 9. *Zadanie specjalne:* Obliczyć objętość kuli n-wymiarowej.