

# ANALIZA I

## Zadania domowe z ciągów liczbowych

Szanowni Państwo, w poniższych zadaniach numeracja podpunktów jest nieco dziwna. Skopiowałam je ze starych serii domowych usuwając niektóre fragmenty, żeby nie było za dużo. Numeracji nie uporządkowałam, żeby zachować zgodność ze wskazówkami i rozwiązaniami. Zadań jest i tak dużo - może przyda się praca zespołowa?

**Zadanie 1.** Wykazać, że:

(a)  $\lim(\sqrt[100]{n^{100} + n^{99}} - n) = \frac{1}{100}$ ;

(b)  $\lim n(n + 4\sqrt{n^2 + n} - 2\sqrt{n^2 - n} - 3\sqrt{n^2 + 2n}) = \frac{5}{4}$ ;

(d)  $\lim\left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^3 + \sqrt{n^5}}} - \sqrt{n^2 + \sqrt{n^3}}\right) = \frac{1}{4}$ ;

(g)  $\lim\left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}\right) = 1$ ;

(h)  $\lim \sqrt[n]{5a^{2n} + 4a^n + 3} = \max\{1, a^2\}$  dla  $a \in \mathbb{R}$ ;

(i)  $\lim(n^7 + 7)^{-7} \sqrt{(n+2)^{100} - n^{100} - 200n^{99}} = 30\sqrt{22}$ ;

(j)  $\lim \sqrt[n]{(3+x)^n + (1-x)^n} = 2 + |1+x|$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ;

(k)  $\lim \frac{p_1 a_1^{n+1} + \dots + p_r a_r^{n+1}}{p_1 a_1^n + \dots + p_r a_r^n} = \max\{a_1, \dots, a_r\}$  oraz  $\lim \sqrt[n]{p_1 a_1^n + \dots + p_r a_r^n} = \max\{a_1, \dots, a_r\}$ , jeśli  $r \in \mathbb{N}$  i liczby  $p_i, a_i$  są dodatnie;

(l)  $\lim\left(\frac{1}{\sqrt[2]{2-1}} - \frac{2}{\sqrt[4]{4-1}}\right) = \frac{1}{2}$ ;

(m)  $\lim 2^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) = 0$ ;

(n)  $\lim \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) = +\infty$ ;

(p)  $\lim n[(n+1)^{\frac{1}{100}} - n^{\frac{1}{100}}] = +\infty$ ;

(s)  $\lim \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}$ ;

(t)  $\lim \sqrt[n]{1^4 + 2^4 + \dots + n^4} = 1$ ;

**Wskazówki:** (h),(j),(k),(t) Wykorzystać twierdzenie o trzech ciągach; (m),(n) Obliczyć  $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$ ; (s) Uprościć wzór na  $x_n$ .

**Zadanie 2.** Zbadać ograniczoność i wyznaczyć kresy zbiorów:

$$\left\{\frac{x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\right\}; \quad \left\{2^x + 2^{1-x} : x \in \mathbb{R}\right\};$$

$$\left\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}; \quad \left\{\frac{m}{n(m+n)} : m, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

**Zadanie 3.** Zbadać zbieżność ciągu  $(x_n)$ , ewentualnie obliczyć granicę:

(d)  $x_n = \cos \frac{2\pi n^2}{2n+1}$ ;

(e)  $x_n = \cos \frac{\pi n^2}{n+3}$ ;

(f)  $x_n = \sin \pi \sqrt{n^2 + n + 1}$ ;

(g)  $x_n = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{n(n+1)}\right)$ ;

(i)  $x_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ ;

(j)  $x_n = (2 - \sqrt[n]{10})^n$ .

**Zadanie 4.** Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie:

(a)  $x_0 > 0$  dane,  $x_{n+1} = \frac{x_n+2}{x_n+1}$ ;

(c)  $x_0 > 2$  dane,  $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$ ;

(d)  $x_0 = 0$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$ ;

(f)  $x_0 \in ]-1, 2[$  dane,  $x_{n+1} = x_n(x_n - 1)$ ;

(i)  $x_0 \in [-1, 1]$  dane,  $x_{n+1} = \frac{10}{1+x_n^2}$ ;

**Wskazówki:**(a),(b),(d) osc.; (b)  $|x_{n+2} - 1| \leq \frac{1}{2}|x_n - 1|$ ; (c) monotoniczny; (e),(j) rosnący; (f) osc.; zacząć od  $x_0 \in [0, 1]$ ; zauważyć, że  $g([0, 1]) \subset [0, 1]$  i  $g(x) \leq x$  na  $[0, 1]$ ; (g),(k) malejący; (h) obliczyć  $g := f \circ f$ ; (i)  $\forall n : |x_n| \leq 1$  lub  $x_n \geq 5$ .**Rozwiązania:** (a),(g)  $l = \sqrt{2}$ ; (b),(j),(d)  $l = 1$ ; (c)  $l = 3$ ; (e)  $l = 2$ ; (f)  $l = 0$ ; (h) zbieżny  $\iff x_0 = \frac{1}{3}$  lub  $x_0 = 1$ ; (i) rozbieżny; (k)  $l = \sqrt[4]{a}$ .**Zadanie 5.** Wykazać, że jeśli  $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+N} = x_n$ , tzn. ciąg  $(x_n)$  jest okresowy, to  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N}$ .Sprawdzić, że ciąg  $(x_1 + \dots + x_n - ns)$ , gdzie  $s := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$ , jest okresowy, a więc ograniczony.