

# Spis pytań na egzamin z Analizy I

## semestr zimowy 2008/2009

Do egzaminu ustnego dopuszczeni są wszyscy, którzy zaliczyli ćwiczenia niezależnie od wyniku egzaminu pisemnego. W wyjątkowych przypadkach dopuszczeni mogą być także ci, którzy zaliczyli ćwiczenia egzaminem, jeśli wynik egzaminu był bardzo dobry albo jeśli zachodzą wyjątkowe okoliczności (np. związane ze zdrowiem).

Aby otrzymać z egzaminu ocenę dostateczną należy odpowiedzieć poprawnie na trzy pytania zwykle wybrane przez egzaminatora. Należy się spodziewać, że jedno pytanie będzie z początku, drugie ze środka a trzecie z końca semestru. Aby otrzymać ocenę dobrą należy odpowiedzieć poprawnie na dwa pytania zwykle wybrane przez egzaminatora i jedno wymagające dowodu. Zdający ma prawo wybrać jedno z trzech zaproponowanych przez egzaminatora pytań z dowodem. Aby otrzymać ocenę bardzo dobrą trzeba odpowiedzieć na jedno pytanie zwykle i dwa pytania wymagające dowodu wybrane przez egzaminatora.

### I. PYTANIA ZWYKŁE

**Pytanie 1.** Zasada Indukcji Matematycznej, sformułowanie i zastosowania.

**Pytanie 2.** Ciało liczb wymiernych. Dowód niewymierności  $\sqrt{2}$ .

**Pytanie 3.** Przekroje Dedekinda - konstrukcja ciała liczb rzeczywistych

**Pytanie 4.** Definicja kresów podzbiorów  $\mathbb{R}$ . Twierdzenie o istnieniu kresów

**Pytanie 5.** Relacje równoważności, definicja, własności i przykłady.

**Pytanie 6.** Odwzorowania. Pojęcia surjekcji, iniekcji i bijekcji. Przykłady.

**Pytanie 7.** Równoliczność. Zbiory skończone i nieskończone. Różne rodzaje nieskończoności. Moce zbiorów liczbowych.

**Pytanie 8.** Pojęcie ciągu liczbowego, definicja ciągu zbieżnego, operacje na ciągach zbieżnych (idea dowodu zbieżności sumy, ilorazu i iloczynu ciągów zbieżnych). Przykłady ciągów.

**Pytanie 9.** Podstawowe twierdzenia służące do badania zbieżności ciągów: Twierdzenie o trzech ciągach, twierdzenie o zbieżności ciągów monotonicznych i ograniczonych.

**Pytanie 10.** Definicja liczby  $e$ . Definicja funkcji  $x \mapsto \exp(x)$  i jej własności.

**Pytanie 11.** Definicja ciągu Cauchy'ego. Twierdzenie o zbieżności ciągu Cauchy'ego - idea dowodu.

**Pytanie 12.** Sformułowanie Twierdzenia Stolza. Przykłady zastosowania.

**Pytanie 13.** Definicja i podstawowe własności funkcji trygonometrycznych.

**Pytanie 14.** Definicja i podstawowe własności funkcji hiperbolicznych.

**Pytanie 15.** Definicja i podstawowe własności funkcji odwrotnych do trygonometrycznych.

**Pytanie 16.** Definicja i podstawowe własności funkcji odwrotnych do hiperbolicznych

**Pytanie 17.** Definicja granicy funkcji w punkcie. Twierdzenie o granicy sumy, iloczynu i ilorazu funkcji.

**Pytanie 18.** Definicja ciągłości funkcji w punkcie. Przykłady. Twierdzenie o ciągłości sumy, iloczynu, ilorazu i złożenia funkcji ciągłych. Idea dowodu.

**Pytanie 19.** Funkcje wypukłe. Definicja, własności, nierówności, ciągłość funkcji wypukłej (idea dowodu).

**Pytanie 20.** Definicja Pochodnej funkcji w punkcie. Przykłady funkcji różniczkowalnych. Przykłady obliczania pochodnej z definicji.

**Pytanie 21.** Reguły różniczkowania. Wzory i idea dowodu.

**Pytanie 22.** Pochodne funkcji elementarnych. Wzory i przykłady wyprowadzenia.

**Pytanie 23.** Własności funkcji pochodnej. Twierdzenie Darboux.

**Pytanie 24.** Twierdzenia Rolla, Lagrange'a i Cauchy'ego oraz ich zastosowania.

**Pytanie 25.** Twierdzenie o różniczkowaniu funkcji odwrotnej. Zastosowania do obliczania pochodnych funkcji arcus i area.

**Pytanie 26.** Wyższe pochodne, definicja i wzór Leibniza. Szkic dowodu wzoru Leibniza.

**Pytanie 27.** Wzór Taylora. Postać, zachowanie reszty, zastosowania. Skąd wiadomo, że dla małych przyrostów reszta jest mała.

**Pytanie 28.** Reguły de l'Hospitala, idea dowodu, zastosowania.

**Pytanie 29.** Jak szukać ekstremów funkcji jednej zmiennej rzeczywistej? Warunki konieczne i wystarczające.

**Pytanie 30.** Funkcje wypukłe i różniczkowalne: własności pierwszej i drugiej pochodnej.

**Pytanie 31.** Funkcja pierwotna, definicja, przykłady, jednoznaczność.

**Pytanie 32.** Funkcja pierwotna dla funkcji ciągłej na odcinku. Idea dowodu istnienia.

**Pytanie 33.** Całkowanie przez części i podstawienie: wzory wraz z uzasadnieniami i przykładami zastosowania.

**Pytanie 34.** Całkowanie funkcji wymiernych.

**Pytanie 35.** Podstawienia Eulera: jak wyglądają i skąd się biorą.

**Pytanie 36.** Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich: fakty i zastosowania.

**Pytanie 37.** Pojęcie zbieżności bezwzględnej. Twierdzenie Riemanna o szeregach zbieżnych warunkowo.

**Pytanie 38.** Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach dowolnych.

## II. PYTANIA WYMAGAJĄCE PRZEPROWADZENIA DOWODU

**Pytanie 1.** Twierdzenie o istnieniu kresów wraz z dowodem.

**Pytanie 2.** Twierdzenie Cantora (o tym, że zbiór podzbiorów zbioru  $X$  jest istotnie większy niż  $X$ ) z dowodem.

**Pytanie 3.** Twierdzenie o zbieżności ciągów monotonicznych i ograniczonych z dowodem.

**Pytanie 4.** Dowód ciągłości funkcji  $x \mapsto \exp(x)$ .

**Pytanie 5.** Dowód Twierdzenia o zbieżności ciągu Cauchy'ego.

**Pytanie 6.** Definicja i własności zbiorów otwartych w  $\mathbb{R}$ . Przykłady, charakteryzacja zbiorów otwartych w  $\mathbb{R}$ .

**Pytanie 7.** Otwartość a ciągłość odwzorowań. Dowód stosownego twierdzenia.

**Pytanie 8.** Zbiór zwarty. Dowód zwartości odcinka domkniętego.

**Pytanie 9.** Zwartość a ciągłość. Dowód stosownego twierdzenia.

**Pytanie 10.** Twierdzenie Darboux dla pochodnej z dowodem.

**Pytanie 11.** Twierdzenie o różniczkowaniu funkcji odwrotnej z dowodem i zastosowaniami.

**Pytanie 12.** Wzór Taylora, wyprowadzenie, postaci reszty, zachowanie reszty.

**Pytanie 13.** Reguły de l'Hospitala z dowodem (przynajmniej niektórych przypadków).

**Pytanie 14.** Kryteria porównawcze zbieżności szeregów z dowodem.

**Pytanie 15.** Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego zbieżności szeregów z dowodami.

**Pytanie 16.** Kryteria Abela i Dirichleta zbieżności szeregów z dowodami.

**Pytanie 17.** Twierdzenie Riemanna o szeregach zbieżnych warunkowo z dowodem.