LICZBY, ZBIORY I FUNKTORY

1. Załóżmy że $a^3+a \in \mathbb{R}$ i $a^2+a \in \mathbb{R}$ są wymierne. Udowodnić że a jest wymierne.

2. Udowodnić że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych.

3. Udowodnić że jest nieskończenie wiele nieskończoności.

4. Udowodnić że $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest ciałem $\iff$ p jest pierwsze.

5. Udowodnić że $|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$.

6. Niech $\mathcal{S}$ będzie kategorią zbiorów i X_0 ustalonym zbiorem. Udowodnić że przyporządkowanie

$$\mathcal{S} \xrightarrow{Map(X_0, \cdot)} \mathcal{S}, \quad X \longmapsto Map(X_0, X)$$

$$(X \xrightarrow{f} Y) \longmapsto \left(Map(X_0, X) \xrightarrow{f\circ} Map(X_0, Y) \right)$$

$$g \longmapsto f \circ g$$

jest funktorem kowariantnym.

Π

W podobny sposób wykazać że $Map(\cdot, X_0)$ jest funktorem kontrawariantnym.

(7) Udowodnić że $1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(8) Udowodnij że $X \xrightarrow{f} Y$ jest injekcją (surj.) $\Longleftrightarrow$ $Map(Y, X_0) \xrightarrow{f^*} Map(X, X_0)$ jest surjekcją (injekcją). $f^*(\alpha) := \alpha \circ f$.

(9) Wykazać że odwzorowanie $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$f(x,y) := \left(x+y, \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ jest bijekcją.

Wyliczyć f^{-1}.

(10) Znaleźć najmniejszą relację równoważności w $\{a, b, c, d\}$ zawierającą (a,c) oraz (a,d). Podać ich klasy i namalować wykres relacji.

(11) Niech $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2-y^2)(x^2+y^2-1)=0\}$

Narysować wykres R. Czy R jest relacją równoważności na $\mathbb{R}^2$? Znaleźć rozkład R na 6 podzbiorów będących wykresami dla jakichś bijekcji. Opisać te bijekcje, ich dziedziny, przeciwdziedziny oraz funkcje odwrotne.

(12) Na płaszczyźnie leży n-kół o jednakowych promieniach i rozłącznych wnętrzach. Wykazać że można tak pokolorować te koła 4 barwami by żadna para kół stycznych nie była w jednym kolorze.