

PRZESTRZENIE TOPOLOGICZNE

- ① Udowodnij że wszystkie podzbiory prostej ograniczonej $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ są domknięte w płaszczyźnie Niemyskiego $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.
- ② Udowodnij że zbiór A jest zwarty $\Leftrightarrow \text{int} A = A$.
- ③ Udowodnij że $\bar{A} = A \cup \{\text{punkty skup. } A\}$.
- ④ Wykazać że jeśli $B \cap \bar{A} \subseteq \overline{B \cap A}$ dla każdego $A \subseteq X$, to B jest zwarte.
- ⑤ Niech $a_1, a_2, a_3 > 0$. Wykazać że $S := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = \frac{x_3^2}{a_3^2}\}$ jest niespójny.
- ⑥ Udowodnij że w topologii dyskretnej zbiór jest zwarty \Leftrightarrow gdy jest skończony.
- ⑦ Udowodnij że zbiór liczb nierychomych jest gęsty w \mathbb{R} .
- ⑧ Udowodnij że warunki $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \forall k' < N: \|f_k - f_{k'}\| > \frac{1}{m}$ i $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \forall k' < N: \|f_k - f_{k'}\| < \frac{1}{m}$ są równoważne. Π