Zadania na ćwiczenia 26-27 października

CIĄGI LICZBOWE I PRZYLEGŁOŚCI

① Na rozgrzewkę: Obliczyć granice poniższych ciągów. W wybranym przykładzie znaleźć $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\forall n > N \quad |x_n - g| < \frac{1}{1000}$ jeśli $g = \lim_{n \to \infty} x_n$

(a) $x_n = \dfrac{3n-2}{2n+1}$ (b) $x_n = \dfrac{3n^3+4n+5}{5n^3+6n^2+7}$

(c) $x_n = \dfrac{n^2+1}{n^3+1}$ (d) $x_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ gdzie p i Q są wielomianami stopnia p i q odpowiednio

(e) $x_n = \sqrt{2n^2+3n+1} - \sqrt{2n^2-3n+1}$

② Kilka ciągów, których granice należy znać i umieć w razie potrzeby wyjaśnić czemu są równe właśnie tyle:

Wykazać, że

Do rozwiązania z pomocą asystentów

(a) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$

(b) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(c) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ← wykazać zbieżność ciągu. Granica nazywa się e

(d) Wykazać zbieżność $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ dla $x \in \mathbb{R}$

granicę nazwać $e(x)$

Av. Francia 17 · Benasque 22440 · Spain · ph: +34 974 551 475 · info@benasque.org · http://benasque.org

(3) Różne ciągi rekurencyjne: Zbadać zbieżność i (ewentualnie) obliczyć granice

(a) $x_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2+3} - \sqrt{n^2+2n+3}$

(b) $x_n = \dfrac{n3^n+2n^2-5}{n!+1}$ (tw. o trzech ciągach)

(c) $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$ (d) $x_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$

(e) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt[n]{8}-1} = x_n$ (f) $x_n = \cos\dfrac{n^2\pi}{n+2}$

(g) $x_n = \sqrt[n]{1^4+2^4+\dots+n^4}$ (h) $x_n = \sqrt[n]{2^n+n}$

(i) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) = x_n$

(4)

Niech $e: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną w zadaniu 2d. Wykazać, że

(a) $e(x)e(y) = e(x+y)$ (zadanie dla asystentów)

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $e(x) \geq 1+x$ (dla studentów)

dla studentów

(c) jeśli $e = e(1)$ to dla $x \in \mathbb{Q}$ $e(x) = e^x$

(d) funkcja e jest rosnąca

(5) Funkcja $x \mapsto e^x$ jest bijekcją. Jej odwrotną nazywamy logarytmem naturalnym i oznaczamy $\log$: $x \mapsto \log x$

Oprócz wprowadzonego wcześniej oszacowania $e^x \geq 1+x$ udowodnić następujące oszacowania

(a) $\forall x < 1 \quad e^x \leq \frac{1}{1-x}$ wskazówka $\frac{1}{e^x} = e^{-x} \geq \ldots$

(b) $\forall x > 0 \quad \log x \geq \frac{x-1}{x}$

(c) $\forall x > 0 \quad \log x \leq 1-x$

wskazówka: te oszacowania wynikają z odpowiednich oszacowań dla $x \mapsto e^x$

(6) Wiedząc, że funkcja $\log :]0,\infty[\ni x \longmapsto \log x \in \mathbb{R}$ jest ciągła tzn dla x_n: $\lim_{n\to\infty} x_n = g$

$$\lim_{n\to\infty} \log(x_n) = \log g$$

udowodnić następujący przydatny fakt:

Jeśli (a_n) (b_n) są ciągami liczbowymi takimi, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz istnieje $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)$ to

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)}$$

Korzystając z tego faktu obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+7}{3n+5}\right)^{2n+3}$$

(7) Zbadać zbieżność ciągów określonych rekurencyjnie

(a) $x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$

(b) $x_0 > 1$

$$x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n}$$

Av. Francia 17 · Benasque 22440 · Spain · ph: +34 974 551 475 · info@benasque.org · http://benasque.org