# ANALIZA MATEMATYCZNA

## WYKŁAD 1

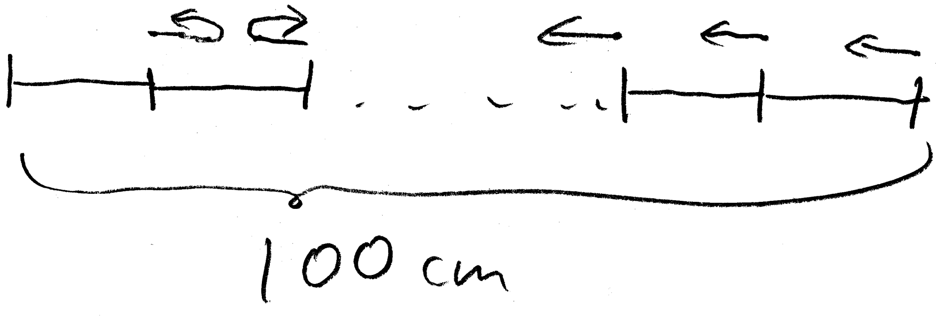
### WSTĘP

Matematyka: nauka o rozwiązywaniu ściśle postawionych problemów.

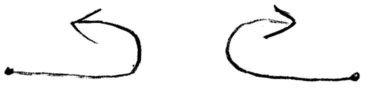
Analiza matematyczna: dział matematyki poświęcony granicom systemów nieskończonych.

Problem: Na metrowym kiju co 1 cm stoi jedna mrówka. Mrówki zaczynają się poruszać ze stałą prędkością 1 cm/s i gdy dochodzą do siebie zawracają w przeciwnym kierunku. Jaki jest najmniejszy czas po którym możemy mieć pewność że wszystkie mrówki zeszły z kija?

Rozwiązanie:




Z punktu widzenia problemu

 jest równoważne 

zawracają wymijają.

Stąd $t = 100\text{cm} / 1\text{cm/s} = 1\text{min } 40\text{s}$. □

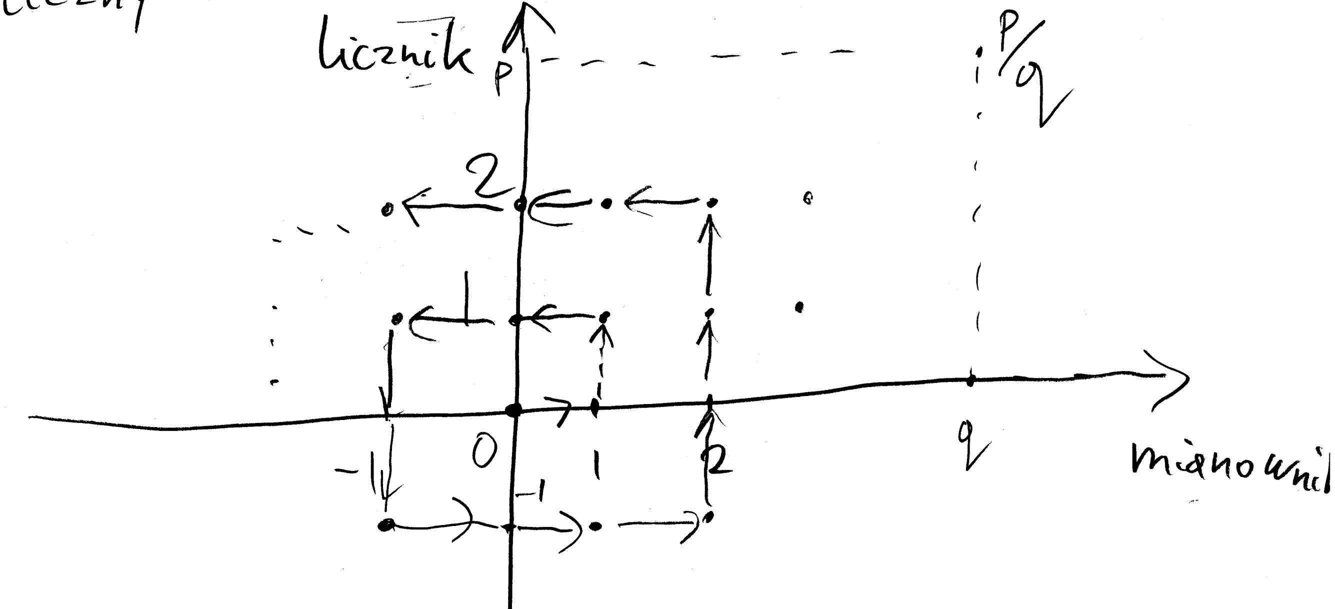
**Żenon z Elei:** Ruch jest niemożliwy bo żeby przejść z A do B trzeba przejść nieskończoną ilość odcinków: $\frac{B-A}{2}, \frac{B-A}{4}, \frac{B-A}{8}, \ldots$

**Analiza:** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$

## ZBIORY

**Definicja:** Zbiory $X$ i $Y$ są równoliczne jeśli $\exists\, X \xrightarrow{f} Y$: ① $\forall y \in Y\ \exists x \in X: f(x) = y$
② $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

**Przykład:** Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest równoliczny ze zbiorem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$:




Wyrzucając $\frac{p}{0}$ dla $p \neq 0$ oraz $\frac{p'}{q'}$ jeśli $\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$ i $\frac{p}{q}$ już mamy, otrzymujemy bijekcję $\mathbb{N} \ni n \mapsto$ n-ty elt $\in \mathbb{Q}$ na oczyszczonej spirali.

Przykład: $X = \{1, \dots, n\}$ i $2^X$ = zbiór wszystkich podzbiorów $X$ nie są równoliczne bo $|X| = n$ a $|2^X| = 2^n$.
Istotnie, weźmy $x \in X$, $A \subseteq X$. Zdefiniujmy

$$2^X \xrightarrow{f_x} \{0,1\}$$

$$f_x(A) := \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x \notin A \\ 1 & \text{jeśli } x \in A \end{cases}$$

Znajomość $A$ to znajomość wszystkich wartości wszystkich funkcji $f_x$: $(f_1(A), f_2(A), \dots, f_n(A))$. Tyle jest $A \in 2^X$ ile jest wszystkich $n$-ciągów o wyrazach z $\{0,1\}$, czyli $2^n$.

Twierdzenie Cantora: Zbiór $X$ nie może być równoliczny ze zbiorem wszystkich swoich podzbiorów $2^X$.

Dowód: Niech $X \xrightarrow{f} 2^X$ będzie dowolnym odwzorowaniem i $Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Wtedy $\forall x \in X: Y \neq f(x)$ bo inaczej $x_0 \in Y = f(x_0) \iff x_0 \notin f(x_0)$

Stąd $\nexists\, X \twoheadrightarrow 2^X$. $\square$

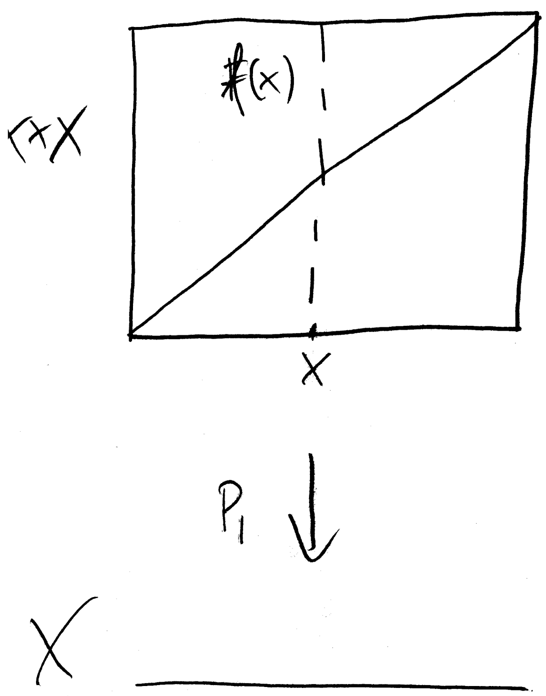
**Wniosek**: Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.

**Dowód**: Przypuśćmy że $X$ jest zbiorem wszystkich zbiorów. Wtedy $2^X \subseteq X$.

Stąd $\exists\ X \xrightarrow{f} 2^X : f(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{jeśli } x \notin 2^X \\ x & \text{jeśli } x \in 2^X \end{cases}$.

To jest sprzeczne z dowodem Twierdzenia Cantora. $\square$

**Ilustracja Twierdzenia Cantora**:




$$M := \{(x,y) \in X \times X \mid y \in f(x)\}$$

$$D := \{(x,y) \in X \times X \mid y = x\}$$

$$Y = P_1(D \setminus M)$$

**Paradoks Russella**: $R$ zbiór zbiorów takich że $X \notin X$. Wtedy $R \in R \Rightarrow R \notin R$ i $R \notin R \Rightarrow R \in R$.

**Twierdzenie Cantora-Bernsteina**: Jeśli $X \subseteq Y \subseteq Z$ i $|X| = |Z|$, to $|Y| = |X|$.

Relacja równoważności w zbiorze $X$ to podzbiór $R \subseteq X \times X$ spełniający następujące warunki:

① $\forall x \in X: \quad (x,x) \in R$ (zwrotność)

② $(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R$ (symetryczność)

③ $(x,y), (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ (przechodniość)

Przykład: $R = \{(x,y) \in X \times X \mid y = x\}$

Przykład: Niech $\{U_i\}_{i \in I}$ będzie rodziną podzbiorów $X$ taką że $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Taką rodzinę nazywamy pokryciem. Zdefiniujmy
$R = \{(x,y) \in X \times X \mid x \in U_i \Leftrightarrow y \in U_i, \forall i \in I\}$

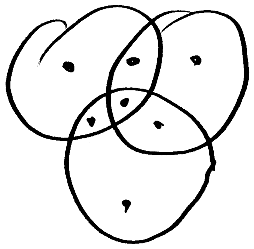
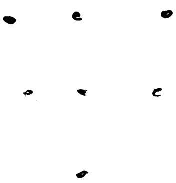
Klasy równoważności: $[x]_R := \{y \in X \mid (x,y) \in R\}$

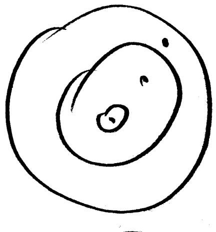
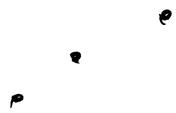
$[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$

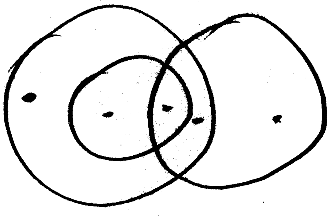
Istotnie, $\exists z_0 \in [x] \cap [y]$. Stąd $z \in [x] \Rightarrow$
$(x,z) \in R \xRightarrow{(z_0,x) \in R} (z_0, z) \in R \xRightarrow{(y,z_0) \in R} (y,z) \in R$
$\Rightarrow z \in [y]$. Podobnie $z \in [y] \Rightarrow z \in [x]$.

**Wniosek:** Zbiór $X$ daje się rozłożyć na sumę rozłącznych podzbiorów będących klasami równoważności. Zbiór wszystkich klas równoważności oznaczamy $X/R$ i nazywamy przestrzenią ilorazową.

**Przykład:** Niech $R$ będzie "pokryciową" relacją równoważności. Dla pokrycia

 mamy  $= X/R$

 mamy  $= X/R$

 mamy  $= X/R$

**Przykład:** $R_p := \{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid m-n = pk, k\in\mathbb{Z}\}$

Ustalmy $p\in\mathbb{N}$. Dla $p=0$ $\mathbb{Z}/R_p = \mathbb{Z}$. Dla $p>0$

$$\mathbb{Z}/R_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p = \mathbb{Z}_p$$

"liczby modulo p" $= \{0, 1, \dots, p-1\}$.

# KATEGORIE I FUNKTORY

<u>Definicja</u>: Kategoria $C$ to para $(Ob(C), Mor(C))$ złożona z klasy (niekoniecznie zbioru) obiektów i klasy morfizmów. Morfizmy spełniają warunki:

1) $\forall f \in Mor(C) \ \exists! \ (a,b) \in Ob(C) \times Ob(C)$

Piszemy: $f \in Mor(a,b)$, $a \xrightarrow{f} b$.

przeciwdziedzina

dziedzina

2) Jeśli $a \xrightarrow{f} b$ i $b \xrightarrow{g} c$, to istnieje jednoznacznie wyznaczone złożenie $a \xrightarrow{g \circ f} c$.

3) Składanie morfizmów jest łączne, tzn.

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, $\forall f \in Mor(a,b)$
$g \in Mor(b,c)$
$h \in Mor(c,d)$
$a,b,c,d \in Ob(C)$

4) $\forall a \in Ob(C) \ \exists id_a \in Mor(a,a)$:

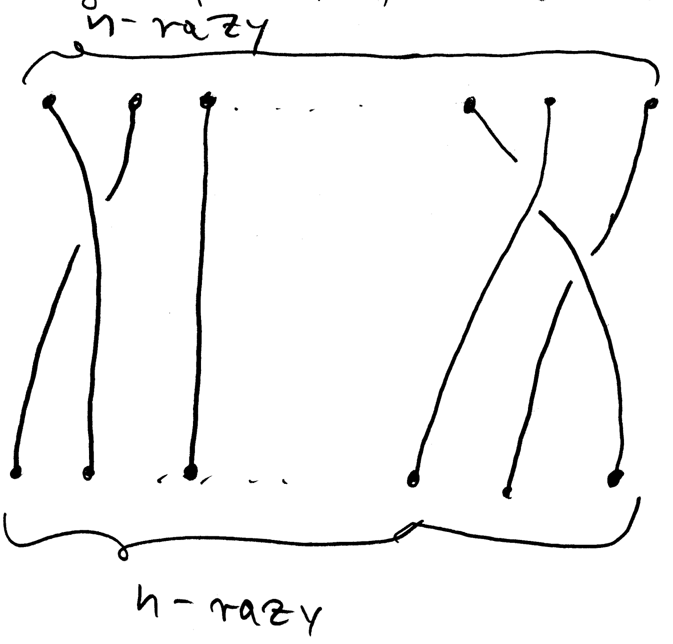
$id_a \circ f = f$, $\forall f \in Mor(x,a)$ oraz

$g \circ id_a = g$, $\forall g \in Mor(a,x)$.

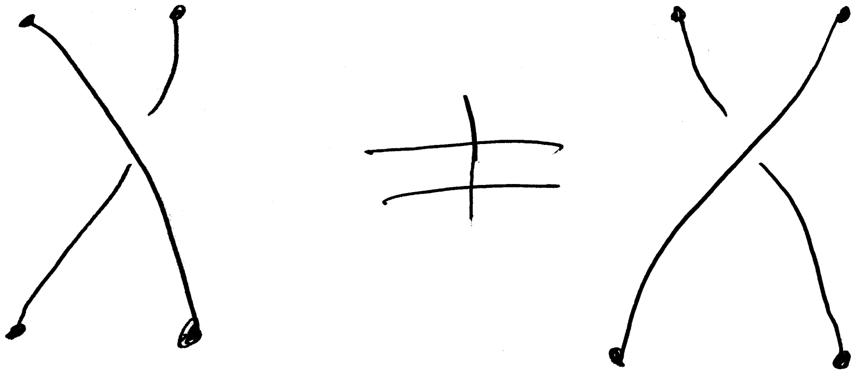
Przykład: Kategoria zbiorów $S$. Jej obiekty to zbiory, jej morfizmy to odwzorowania:

$$Mor(X,Y) := Map(X,Y)$$ (zbiór wszystkich odwzorowań z $X$ w $Y$).

Przykład: Kategoria warkoczy. Jej obiekty to liczby naturalne. $Mor(m,n) \neq \emptyset \Leftrightarrow m=n$. Morfizmy $f \in Mor(n,n)$ to warkocze:




Warkoczy jest więcej niż odwzorowań bo



Grupoid to kategoria której obiekty tworzą zbiór i wszystkie morfizmy są izomorfizmami. Morfizm $f \in Mor(a,b)$ nazywamy izomorfizmem gdy $\exists g \in Mor(b,a)$: $f \circ g = id_b$ i $g \circ f = id_a$. Takie $g$ jest jedyne bo z $f \circ g' = id_b$ i $g' \circ f = id_a$ wynika

$$g' \circ (f \circ g) = g' \circ id_b \Rightarrow (g' \circ f) \circ g = g' \Rightarrow$$

$$id_a \circ g = g' \Rightarrow g = g'.$$

Grupa to grupoid nad jednym obiektem.

Zwyczajowo patrzymy na grupę jako na zbiór morfizmów $G = Mor(a,a)$ wyposażonych w binarną operację składania

$$G \times G \ni (f,g) \longmapsto \underset{fg}{f \circ g} \in G.$$

Morfizm $id_a$ nazywamy elementem neutralnym grupy.

**Definicja:** Funktor kowariantny $F$ z kategorii $A$ do $B$ to przyporządkowanie z $Ob(A)$ do $Ob(B)$ i z $Mor_A(a,b)$ do $Mor_B(F(a), F(b))$, $\forall a,b \in Ob(A)$, takie że $\forall\ f \in Mor_A(a,b)$, $g \in Mor_A(b,c)$, $a,b,c \in Ob(A)$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \quad i \quad F(id_a) = id_{F(a)}.$$

Funktor kontrawariantny $G$ jest zdefiniowany tak samo za wyjątkiem warunku $F(g\circ f) = F(g)\circ F(f)$ który zastępujemy warunkiem $G(g \circ f) = G(f) \circ G(g)$.

Przykłady: Niech $S$ będzie kategorią zbiorów, a $X_0$ ustalonym zbiorem. Wtedy przyporządkowanie $S \xrightarrow{Map(X_0, \ )} S$, $X \mapsto Map(X_0, X)$,

$$(X \xrightarrow{f} Y) \longmapsto \left(Map(X_0, X) \xrightarrow{f\circ} Map(X_0, Y)\right)$$
$$g \longmapsto f \circ g$$

jest funktorem kowariantnym. Analogicznie, $S \xrightarrow{Map( \ , X_0)} S$ jest funktorem kontrawariantnym.

Przykład: Funktor zapominania z kategorii warkoczy do kategorii permutacji.

# LICZBY

**Liczby naturalne $\mathbb{N}$:** Stwarzamy je tak

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\},\emptyset\},\ \dots$$

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\ \dots$$

**Liczby całkowite** $\mathbb{Z} := (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/R$

$$R := \{(m,n,p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid p+n = m+q\}$$

$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto [(n,0)]$ jest injekcją bo

$$[(m,0)] = [(n,0)] \Rightarrow m+0 = n+0 \Rightarrow m=n$$

Liczby ujemne $-m = [(0,m)]$.

$\mathbb{Z}$ jest grupą bo operacja $[(m,n)]+[(p,q)] := [(m+p),(n+q)]$ jest ① dobrze zdefiniowana, ② $[(0,0)]$ jest elementem neutralnym, oraz ③ każdy element jest odwracalny: $[(m,n)]^{-1} = [(n,m)]$. Istotnie, ① $m+n' = m'+n$ i $p+q' = p'+q \Rightarrow m+p+n'+q' = m'+p'+n+q$, ② $[(0,0)] + [(m,n)] = [(m,n)] = [(m,n)] + [(0,0)]$

③ $[(m,n)] + [(n,m)] = [(m+n, n+m)] = [(0,0)]$

<u>Liczby wymierne</u> $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/R$

$R := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid ad = bc\}$

$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}, \quad a \mapsto [(a,1)]$

$(\mathbb{Q}, +)$ jest grupą oraz $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$ jest grupą. Są to grupy abelowe ($x+y = y+x$ i $xy = yx$) i mnożenie jest rozdzielne względem dodawania ($x(y+z) = xy + xz$). Zbiór $\mathbb{K}$ wyposażony w dwie binarne operacje spełniające powyższe warunki nazywamy <u>ciałem</u>.

<u>Liczby rzeczywiste</u> $\mathbb{R} := \mathrm{Cauchy}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})/R$

$\mathrm{Cauchy}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) := \{f \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \mid \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k > N : |f_k - f_N| < \frac{1}{n}\}$

$R := \{ (f,g) \in \mathrm{Cauchy}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})^{\times 2} \mid$

$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k > N\ |f_k - g_k| < \frac{1}{n} \}$.

$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$, $r \mapsto [n \mapsto r, \forall n \in \mathbb{N}]$,

jest injekcją bo $0 \leq |r - r'| < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$\Rightarrow |r - r'| = 0$ czyli $r = r'$.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ też jest ciałem

<u>Liczby zespolone</u> $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest

ciałem ze względu na operacje

$(r, s) + (r', s') = (r + r', s + s')$

$(r, s) \cdot (r', s') = (rr' - ss', rs' + sr')$.

$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $r \mapsto (r, 0)$.

$(0,1)^2 = (-1, 0)$ więc $(0,1) = \sqrt{-1} = i$

$(r, s) = r + is$.

# LICZBY, ZBIORY I FUNKTORY

① Załóżmy że $a^3+a$ i $a^2+a$ są wymierne. Udowodnić że $a$ jest wymierne.

② Udowodnić że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych.

③ Udowodnić że jest nieskończenie wiele nieskończoności.

④ Udowodnić że $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest ciałem $\Longleftrightarrow$ $p$ jest pierwsze.

⑤ Udowodnić że $|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$.

⑥ Niech $\mathcal{S}$ będzie kategorią zbiorów i $X_0$ ustalonym zbiorem. Udowodnić że przyporządkowanie

$$\mathcal{S} \xrightarrow{Map(X_0,\cdot)} \mathcal{S}, \quad X \longmapsto Map(X_0, X)$$

$$(X \xrightarrow{f} Y) \longmapsto \left(Map(X_0,X) \xrightarrow{f\circ} Map(X_0,Y)\right)$$

$$g \longmapsto f\circ g$$

jest funktorem kowariantnym.

W podobny sposób wykazać że $\mathrm{Map}(\cdot, X_0)$ jest funktorem kontrawariantnym.

(7) Udowodnić że $1^3+3^3+\dots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(8) Udowodnij że $X \xrightarrow{f} Y$ jest injekcją (surj.) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Map}(Y, X_0) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Map}(X, X_0)$ jest surjekcją (injekcją). $f^*(\alpha) := \alpha \circ f$.

(9) Wykazać że odwzorowanie $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$
$f(x,y) := \left(x+y, \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ jest bijekcją.
Wyliczyć $f^{-1}$.

(10) Znaleźć najmniejszą relację równoważności w $\{a, b, c, d\}$ zawierającą $(a,c)$ oraz $(a,d)$. Podać ich klasy i namalować wykres relacji.

(11) Niech $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2-y^2)(x^2+y^2-1)=0\}$.

Narysować wykres $R$. Czy $R$ jest relacją równoważności na $\mathbb{R}$? Znaleźć rozkład $R$ na 6 podzbiorów będących wykresami dla jakichś bijekcji. Opisać te bijekcje, ich dziedziny, przeciwdziedziny oraz funkcje odwrotne.

(12) Na płaszczyźnie leży $n$-kół o jednakowych promieniach i rozłącznych wnętrzach. Wykazać że można tak pokolorować te koła 4 barwami by żadna para kół stycznych nie była w jednym kolorze.