Szeregi podwójne

Uwaga. Na ogół $\sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij} \neq \sum\limits_j \sum\limits_i a_{ij}$

Tw. Jeśli $\sum\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}| < \infty$, to $\sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij} = \sum\limits_j \sum\limits_i a_{ij} = \sum\limits_{(i,j)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij}$

Tw (Cauchy) – mnożenie szeregów bezwzględnie zbieżnych.

$$\left(\begin{matrix} \sum a_i \; - \\ \sum b_i \; - \end{matrix} \right\} \text{ bezwzgl. zbieżne} \Big) \Longrightarrow \sum_{(i,j)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_i b_j \text{ - zbieżny}$$

oraz $\sum\limits_{(i,j)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_i b_j = \sum\limits_i a_i \sum\limits_j b_j$

Idea dowodu. Dane $\varepsilon > 0$. Istnieją N_1, N_2 t.że

dla $I \subset \mathbb{N} \setminus \{1 \dots N_1\}$ $\sum\limits_{i\in I} |a_i| < \varepsilon$

$J \subset \mathbb{N} \setminus \{1 \dots N_2\}$ $\sum\limits_{j\in J} |b_j| < \varepsilon$

Oczywiście $\sum\limits_{i=1}^{N_1} \sum\limits_{j=1}^{N_2} a_i b_j = \sum\limits_{i=1}^{N_1} a_i \sum\limits_{j=1}^{N_2} b_j$. Natomiast $\sum\limits_{I\times J} |a_i b_j| < \varepsilon^2$

Widać stąd, że ~~dla ta~~

$$\forall \varepsilon' > 0 \; \exists_{\substack{Z \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ \text{sk}}} \; \forall_{\substack{Z' :\, Z' \cap Z = \emptyset \\ \text{sk}}} \sum_{(i,j)\in Z'} |a_i b_j| < \varepsilon'$$

O zbieżności jednostajnej ciągów i szeregów funkcji. 1

Tw. $\left(\begin{array}{l} f_n \overset{jedn}{\Rightarrow} f \text{ na zb. } A \\ f_n - \text{ciągłe na } A \end{array} \right) \Rightarrow f - \text{ciągłe na } A$

D. Bierzemy $x_0 \in A$, $\varepsilon > 0$.

Dobieramy $N \in \mathbb{N}$ t, że $\forall n > N$ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

— " — $\delta > 0$ t, że $\forall x : |x - x_0| < \delta$ $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Dla $|x - x_0| < \delta$ mamy

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\varepsilon/3} < \varepsilon$$

□

Tw. $\left(\begin{array}{l} |f_n(x)| \leq a_n \\ \text{dla } x \in A \end{array}, \ \sum a_n - \text{zbieżny} \right) \Rightarrow \sum f_n(x)$ zb. jednost na A

D. oczywiste.