Analiza 6)

Własności pochodnej.

1. $(f \pm g)' = f' + g'$
2. $(af)' = af' \quad a \in R$
3. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

D. (tylko trudniejsze: 3 i 4)

3. $\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$

$\xrightarrow{h \to 0} f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4. $\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x)}{g(x+h) \cdot g(x)}$

$\xrightarrow{h \to 0} \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Własność 5 – trudniejsza

Jeśli f jest różnowartościowa w pewnym otoczeniu x_0 i jest w ~~tym~~ x_0 różniczkowalna, ~~oraz~~ $f'(x_0) \neq 0$, to

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

D. Oznaczenia $f^{-1} = g \quad f(x_0) = y_0 \quad f(x_0+h) = y_0 + k$

$$\frac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k} = \frac{x_0 + h - x_0}{f(x_0+h) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)} \qquad k = f(x_0+h) - f(x_0)$$

Uwaga! Tutaj korzystamy z tego, że $h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0$

To jest ciągłość funkcji odwrotnej. (właściwie z $\Leftarrow$)

Przykład: $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \left(= \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} \right)$