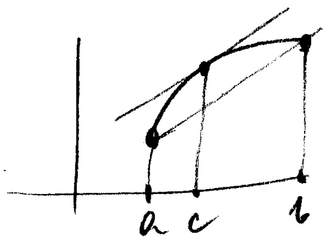
Tw (Lagrange) (twierdzenie o wartości średniej r. różniczkowego) 2

Z. f - ciągła na $[a,b]$, różniczkowalna na $]a,b[$

T. Istnieje $c \in]a,b[$ t. że $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



D. Funkcja pomocnicza $F(x) = f(x) - (x-a)\cdot\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Ponieważ $F(a) = f(a) = F(b)$, stosujemy tw Rolle'a.

Wnioski z tw. Lagrange'a.

Stw 1. $f' > 0$ na $]a,b[$ $\Rightarrow$ f ściśle rosnąca na $]a,b[$ (tzn $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$)

$f' \geq 0$ — " — " f - rosnąca na $]a,b[$ ($x<y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$)

Stw 1'. f - rosnąca na $]a,b[$ $\Rightarrow$ $f' \geq 0$ na $]a,b[$

Uwaga. Z tego, że f - ściśle rosnąca nie wynika, że $f'>0$. Przykład: $f(x)=x^3$.

Stw. $f'=0$ na $]a,b[$ $\Rightarrow$ f - stała na $]a,b[$

D. $f(x)-f(y) = f'(c)(x-y) = 0$. □

Trochę ogólniejsza postać tw. o w. średniej

Tw (Cauchy) Z. f,g - ciągłe na $[a,b]$, różniczkowalne na $]a,b[$, $g'(x)\neq 0$ dla wszystkich $x \in]a,b[$

T. $\exists\, c \in]a,b[$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

D. Fkcja pomocnicza $F(x) = f(x) - (g(b)-g(a))\cdot\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. (Najpierw wykazuje się, że $g(b)\neq g(a)$)