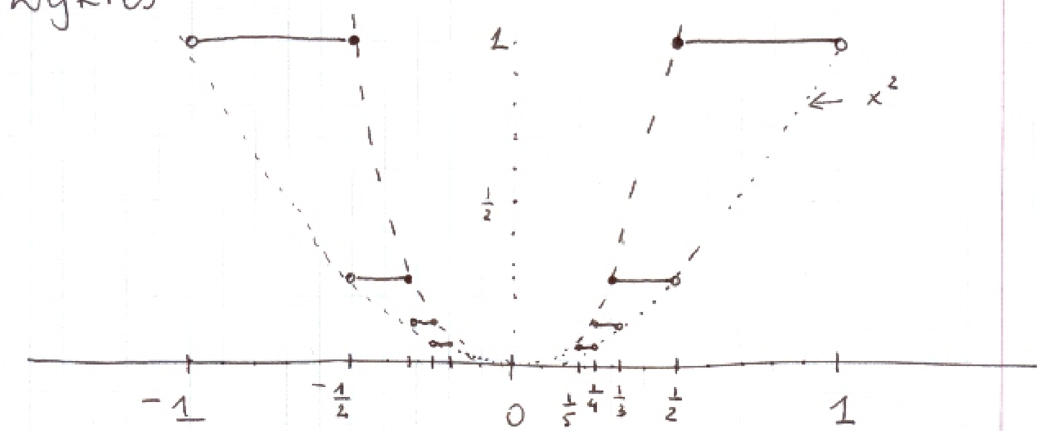
Zadanie 4 serie 17-18.11

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1/n^2 & \frac{1}{n+1} \le |x| \le \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

<

Wykres



kropkowane : $x \longmapsto x^2$

kreskowane? sprawdzamy

$$\frac{1}{n+1} \longmapsto \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1/n}{1 + 1/n} \qquad x = \frac{1/n}{1+1/n} \qquad (x)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

$$x + \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \qquad \frac{1}{n}(1-x) = x \qquad \frac{1}{n} = \frac{x}{1-x}$$

tzn.

$$\frac{1}{n+1} = x \longmapsto \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$$

kreskowane funkcje:

$$x \longmapsto \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$$

Wiemy więc, że
$$x^2 \le f(x) \le \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \qquad |x|<1.$$

W szczególności f jest ciągła w $x=0$.
Badamy różniczkowalność w $x=0$.
Czy istnieje granica
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h}$$

Dla $h \to 0^+$

$$h^2 \le f(h) \le \frac{h^2}{(1-h)^2} \quad /:h$$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{h} \le \frac{f(h)}{h} \le \underset{\downarrow h\to 0^+ \atop 0}{\frac{h}{(1-h)^2}}$$

Zatem $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = 0$ prawostronna pochodna istnieje i jest równa zero.

podobnie

Dla $h \to 0^-$
$$h^2 \le f(h) \le \frac{h^2}{(1-h)^2} \quad /:h$$

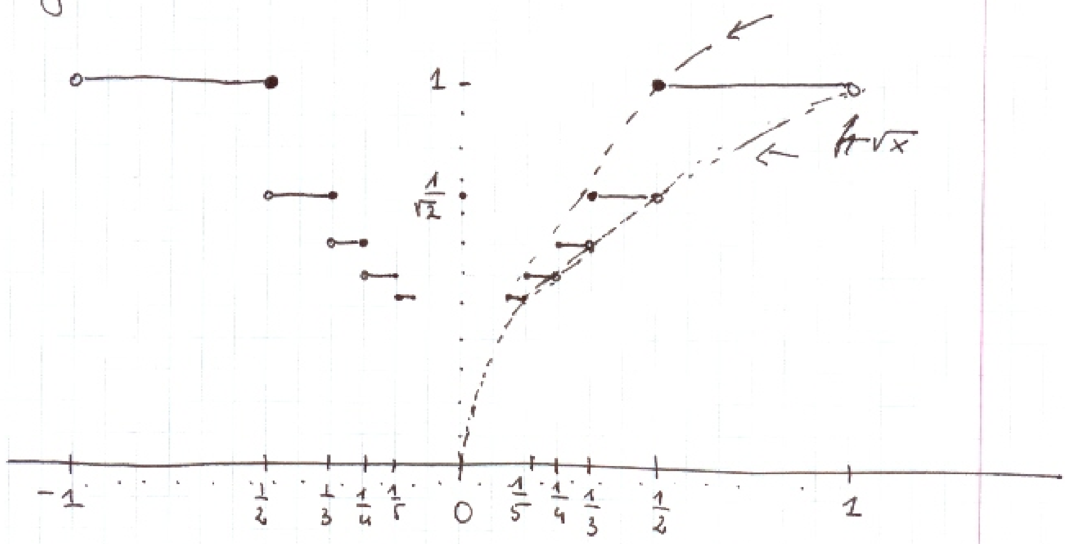
$$\underset{\downarrow \atop 0}{\frac{h}{(1-h)^2}} \le \frac{f(h)}{h} \le \underset{\downarrow \atop 0}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Obie granice istnieją i są równe zatem funkcja f jest różniczkowalna i $f'(0)=0$.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{n+1} \le x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Wykres



$$\frac{1}{n+1} \longmapsto \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1/n}{1+1/n} \longrightarrow \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$x \longmapsto \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

dla $x>0$.

$$\boxed{\sqrt{x} \le g(x) \le \sqrt{\frac{x}{1-x}}}$$

skoro

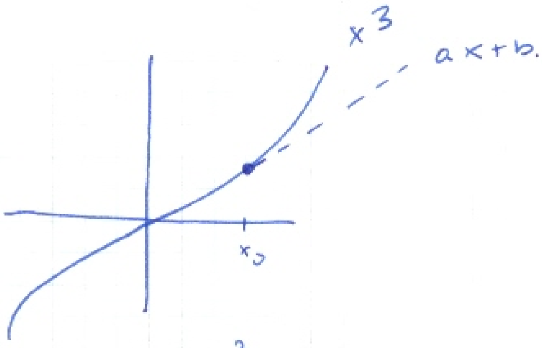
$$\frac{\sqrt{x}}{x} \xrightarrow{x \to 0^+} \infty \qquad \frac{\sqrt{x}}{x} \xrightarrow{x \to 0^-} -\infty$$

to $\sqrt{x}$ nie jest różniczkowalna w $x=0$

podobnie

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x} = +\infty$$ i g nie jest różniczkowalna w $x=0$.

Zadanie 3.



ciągłości : $ax_0 + b = x_0^3$ $\longrightarrow$ $b = x_0^3 - a x_0 =$

różniczkowalności : $3x_0^2 = a$ $\qquad x_0^3 - 3x_0^3 = -2x_0^3$

$$a = 3x_0^2$$
$$b = -2x_0^3$$