

## ANALIZA II

Rozwiązanie zadania 6b z zestawu na 12-16 kwietnia

Niech  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ma postać:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ 4x + 3y + 5z \end{pmatrix}.$$

Wówczas norma pitagorejska  $\|T\|_2$  dana jest wzorem

$$\|T\|_2 = \sup_{\|(x,y,z)\|_2=1} \sqrt{(3x+y)^2 + (4x+3y+5z)^2}.$$

Zamiast szukać ekstremów pierwiastka poszukamy ekstremów funkcji podpierwiastkowej – rachunki będą dużo łatwiejsze. Mamy więc badać

$$\tilde{f}(x, y, z) = (3x + y)^2 + (4x + 3y + 5z)^2$$

na sferze jednostkowej  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Dla celów rachunkowych zapiszmy funkcję w postaci rozwiniętej:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y, z) &= 9x^2 + 6xy + y^2 + 16x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 24xy + 30yz + 40xz = \\ &= 25x^2 + 10y^2 + 25z^2 + 30xy + 30yz + 40xz = 5(5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 6xy + 6yz + 8xz) \end{aligned}$$

Kolejny raz upraszczamy rachunki przyjmując za podstawową funkcję  $f = \tilde{f}/5$ . Korzystamy z metody mnożników Lagrange'a. Do różniczkowania mamy funkcję:

$$F(x, y, z) = 5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 6xy + 6yz + 8xz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

Szukamy  $F'(x, y, z)$  licząc pochodne cząstkowe po  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= (10 - 2\lambda)x + 6y + 8z, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 6x + (4 - 2\lambda)y + 6z, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 8x + 6y + (10 - 2\lambda). \end{aligned}$$

Warunek  $F'(x, y, z) = 0$  ma więc wygodną algebraiczną postać

$$\begin{pmatrix} (10 - 2\lambda) & 6 & 8 \\ 6 & (4 - 2\lambda) & 6 \\ 8 & 6 & (10 - 2\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Jest to równanie liniowe jednorodne. Równanie to ma niezerowe rozwiązanie jedynie w sytuacji, gdy wyznacznik macierzy tego równania jest równy zero. Rozwiązanie zerowe nie spełnia równania powierzchni. Mamy więc następujący warunek na wartość mnożnika  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} (10 - 2\lambda) & 6 & 8 \\ 6 & (4 - 2\lambda) & 6 \\ 8 & 6 & (10 - 2\lambda) \end{pmatrix} &= 2^3 \det \begin{pmatrix} (5 - \lambda) & 3 & 4 \\ 3 & (2 - \lambda) & 3 \\ 4 & 3 & (5 - \lambda) \end{pmatrix} = \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 11\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 12\lambda + 11) = \lambda(\lambda - 11)(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Wartości mnożnika Lagrange'a, dla których mogą istnieć punkty krytyczne to 0, 1 i 11. Dla  $\lambda = 0$  współrzędne punktu krytycznego muszą spełniać warunek

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Stosując metody znane z algebry stwierdzamy, że

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ musi być proporcjonalny do } \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wstawiając warunek  $x = a$ ,  $y = -3a$ ,  $z = a$  do równania sfery dostajemy

$$1 = a^2 + 9a^2 + a^2 = 11a^2, \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Znaleźliśmy dwa pierwsze punkty krytyczne

$$A_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right), \quad A_2 = \left( \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}} \right)$$

Podobne rachunki robimy dla  $\lambda = 1$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ musi być proporcjonalny do } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wstawiając warunek  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $z = -a$  do równania sfery dostajemy

$$1 = a^2 + a^2 = 2a^2, \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Znaleźliśmy dwa kolejne punkty krytyczne

$$B_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad B_2 = \left( \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Jeszcze raz to samo dla  $\lambda = 11$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 3 \\ 4 & 3 & -6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ musi być proporcjonalny do } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wstawiając warunek  $x = 3a$ ,  $y = 2a$ ,  $z = 3a$  do równania sfery dostajemy

$$1 = 9a^2 + 4a^2 + 9a^2 = 22a^2, \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{22}}.$$

Znaleźliśmy dwa kolejne punkty krytyczne

$$C_1 = \left( \frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{2}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}} \right), \quad C_2 = \left( \frac{-3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{-3}{\sqrt{22}} \right).$$

Funkcja  $f$  ma na sferze 6 punktów krytycznych:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left( \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right), \quad \lambda = 0; \\ A_2 &= \left( \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}} \right), \quad \lambda = 0; \\ B_1 &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \lambda = 1 \\ B_2 &= \left( \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \lambda = 1 \\ C_1 &= \left( \frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{2}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}} \right), \quad \lambda = 11; \\ C_2 &= \left( \frac{-3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{-3}{\sqrt{22}} \right), \quad \lambda = 11. \end{aligned}$$

Ponieważ sfera dwuwymiarowa jest zbiorem zwartym, aby znaleźć maksimum  $f$  na sferze wystarczy policzyć wartość  $f$  w punktach krytycznych i wybrać największą. Zastanowiwszy się dobrze zauważymy bez rachunków, że wartości  $f$  w punktach  $A_i, B_i, C_i$  są równe odpowiednim wartościom mnożnika  $\lambda$ . Największa wartość zatem to 11. Pamiętając, że maksimum funkcji  $f$  w stosunku do normy  $T$  różni się o czynnik 5 i pierwiastek otrzymujemy

$$\|T\|_2 = \sqrt{5 \cdot 11} = \sqrt{55}.$$

Na tym można by zakończyć rozwiązanie tego zadania. W celach dydaktycznych przeprowadzmy jednak badanie jednego z punktów krytycznych. Wybierzmy  $B_1$  dla  $\lambda = 1$ . Druga pochodna  $F$  ma postać:

$$F''(x, y, z) = \begin{pmatrix} (10 - 2\lambda) & 6 & 8 \\ 6 & (4 - 2\lambda) & 6 \\ 8 & 6 & (10 - 2\lambda) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} (5 - \lambda) & 3 & 4 \\ 3 & (2 - \lambda) & 3 \\ 4 & 3 & (5 - \lambda) \end{pmatrix}.$$

Wstawiając wartość  $\lambda = 1$  i pomijając dodatni czynnik 2, otrzymujemy formę kwadratową (dwuliniową symetryczną) której własności decydują o typie punktu krytycznego. Oznaczmy tę formę (dwuliniową symetryczną) przez  $Q$ . Jej macierz w bazie kanonicznej ma postać:

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pamiętamy jednak, że **określoność formy kwadratowej  $F''(B_1)$  badamy jedynie !!! w kierunkach stycznych do powierzchni !!! w punkcie  $B_1$** . Szukamy więc wektorów  $v$  stycznych do sfery w punkcie  $B_1$ . Wektory te muszą spełniać warunek

$$G'(B_1)v = 0,$$

gdzie  $G(x, y, z) = 0$  zadaje sferę jednostkową. Mamy więc:

$$G'(x, y, z) = [2x, 2y, 2z], \quad G'(B_1) = [\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}]$$

$$\ker G'(B_1) = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Forma  $Q$  obcięta do  $\ker G'(B_1)$  ma macierz

$$\begin{pmatrix} Q(v_1, v_1) & Q(v_1, v_2) \\ Q(v_1, v_2) & Q(v_2, v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Odpowiednie wyznaczniki mają wartość  $D_1 = 16$ ,  $D_2 = -4$ . Forma  $Q$  obcięta do przestrzeni stycznej do sfery w punkcie  $B_1$  ma więc sygnaturę  $(+, -)$ . Punkt  $B_1$  jest punktem siodłowym.