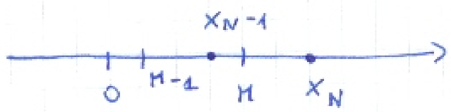
Zadanie 1. Obserwujemy, że (x_n) spełniający warunek $\lim_{n\to\infty} x_n(x_n-1)=0$ musi być ograniczony. Istotnie:

jeśli (x_n) nie jest ograniczony to znaczy, że

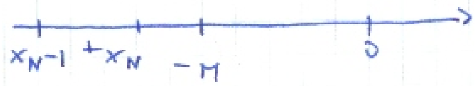
$\forall M>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} : |x_N| > M$

wtedy

(*) $|x_N(x_N-1)| > M\,|x_N-1| > M(M-1)$



$|x_N-1| > M-1$ dla $x_N>0$



$\to |x_n-1| > M$ dla $x_N<0$

(*) jest sprzeczne z warunkiem zbieżności do zera. Jeśli $(x_n-1)x_n \longrightarrow 0$ to ~~t~~ oznacza że prawie wszystkie wyrazy $x_n(x_n-1)$ są w pobliżu zera, a (*) oznacza że $|x_n(x_n-1)|$ ~~jest~~ zawiera dowolnie duże wyrazy.

Mając ograniczoność korzystamy z ciągłości log i zamiast liczyć $\lim_{n\to\infty}(1+x_n^2)^{x_n-1}$ liczymy $\lim_{n\to\infty}\log(1+x_n^2)^{x_n-1}$

$$\log(1+x_n^2)^{x_n-1} = (x_n-1)\log(1+x_n^2)$$

$$|(x_n-1)\log(1+x_n^2)| = |x_n-1|\log(1+x_n^2) \le |x_n-1|\,x_n^2 = \mathrm{sgn}(x_n-1)\,(x_n)(x_n-1)\cdot x_n$$

$$0 \le |x_n-1|\log(1+x_m^2) \le \underbrace{\underbrace{[x_n(x_n-1)]}_{\downarrow n\to\infty \ 0}\ \underbrace{x_n\,\mathrm{sgn}(x_n-1)}_{\text{ograniczone}}}_{\downarrow n\to\infty \ 0}$$

Z tw. o trzech ciągach

$$\lim |x_n-1|\log(1+x_n^2) = 0$$

zatem także

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - 1)\log(1 + x_n^2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \log(1 + x_n^2)^{(x_n - 1)} = 0.$$

cyli $\quad (1 + x_n^2)^{(x_n-1)} \xrightarrow{n\to\infty} e^0 = 1.$

$\square$.

Zadanie 2:

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \qquad n \geq 1.$$

badamy monotoniczność:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1+1} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} =$$

$$= \frac{2n + 2 - 2n - 1}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$$

ciąg jest więc rosnący.

Mamy także dla $y_n = x_n + \frac{1}{2n+1}$ $\quad x_n < y_n$

oraz y_n jest malejący bo:

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \frac{1}{2n+3} - x_n - \frac{1}{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2(n+1)} =$$

$$= \frac{2n+2-2n-3}{2(2n+3)(n+1)} = \frac{-1}{2(2n+3)(n+1)} < 0$$

mamy więc

$$\underset{\text{rosnący}}{x_n} < \underset{\text{malejący}}{y_n}$$

zatem x_n ograniczony przez np. y_1.

x_n jest więc zbieżny.

Zadanie 3

Korzystamy z tw. Cauchy'ego, które mówi, że: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)$ jeśli prawa strona istnieje.

(a) założmy, że istnieje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\log \sqrt[n]{a_n} = \log (a_n)^{1/n} = \frac{1}{n}\log(a_n)$$

jeśli $y_n = \log a_n$ to mamy zbadać $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{n}$ można więc zacząć od

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1}-y_n = \lim_{n\to\infty} \log a_{n+1} - \log a_n = \lim_{n\to\infty} \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Granica $\lim_{n\to} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ istnieje zatem także $\lim_{n\to\infty} \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$ istnieje. Z tw. Cauchy wnioskujemy więc że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log a_n = \lim_{n\to\infty} \log \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{tzn.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

log jest funkcją ciągłą i różnowartościową zatem można wnioskować że także

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \ldots b_n}$

oznaczmy $a_n = b_1 \ldots b_n$ wtedy $\frac{a_{n+1}}{a_n} = b_{n+1}$. skoro istnieje granica b_n to istnieje także

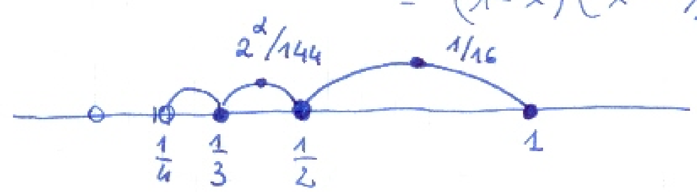
$\sqrt[n]{a_n}$ czyli $\sqrt[n]{b_1 \ldots b_n}$

Zadanie 4: W każdym z przedziałów $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ wykres funkcji f jest parabolą o ramionach zwróconych w dół i miejscach zerowych w punktach $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}$:

np. $n = 1$.

$$x \in]\tfrac{1}{2}, 1] \quad f(x) = 1^{\alpha}(1-x)(x-\tfrac{1}{2}) = (1-x)(x-1/2)$$

$$f(3/4) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$



$n = 2$

$$x \in]\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}] \quad f(x) = 2^{\alpha}(\tfrac{1}{2}-x)(x-\tfrac{1}{3})$$

$$(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})/2 = \frac{3+2}{6}/2 = \frac{5}{12}$$

$$f(5/12) = 2^{\alpha}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12} = \frac{2^{\alpha}}{144}$$

Wzór zmienia się w punktach $\frac{1}{n}$ i we wszystkich tych punktach f jest zero, więc f jest ciągła na $]0, 1]$. Pozostaje badanie w $x = 0$.

$$\text{dla } x \in]\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}] \quad f(x) < f\left(\frac{2n+1}{2n(n+1)}\right) = (*)\ \frac{n^{\alpha}}{4n^2(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right) = \frac{n+n+1}{2n(n+1)} = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

wierzchołek paraboli jest w tym punkcie

$$n^{\alpha}\left(\frac{1}{n} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}\right)\left(\frac{2n+1}{2n(n+1)} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= n^{\alpha}\,\frac{2(n+1)-2n+1}{2n(n+1)}\cdot\frac{2n+1-2n}{2n(n+1)} =$$

$$= \frac{n^{\alpha}\cdot 1}{4n^2(n+1)^2} \quad (*)$$

dla $x_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$ $\quad f(x_n) = \frac{n^\alpha}{4n^2(n+1)^2}$

ciąg $x_n \to 0$ zatem aby f było ciągłe w zerze musi być spełnione $f(x_n) \to 0$. tzn. $\alpha < 4$. Dla $\alpha \geq 4$ $\lim f_n(x_n) = \begin{cases} 1/4 & n=4 \\ \infty & n>4 \end{cases}$.

Dla $\alpha < 4$ ~~warunek~~ ~~4~~

funkcja jest ciągła bo mamy nierówność

$0 \leq f(x) < \frac{n^\alpha}{4n^2(n+1)}$ dla $x \in \left]\frac{1}{n+1}, n\right]$

f jest ograniczona przez funkcję schodkową mającą granicę w 0.

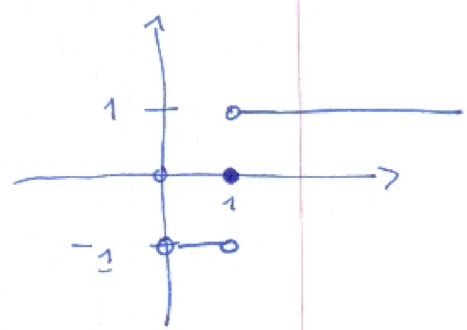
Zadanie 5

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \qquad f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(1) = \lim_{n \to \infty} \frac{1^n - 1^{-n}}{1^n + 1^{-n}} = 0.$$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n - \overset{\to \infty}{x^{-n}}}{x^n + \underset{\downarrow 0}{x^{-n}}} = 1.$$

dla $x > 1$



$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\overset{\uparrow 0}{x^n} - x^{-n}}{\underset{\downarrow 0}{x^n} + x^{-n}} = -1$$

dla $x < 1$

f jest ciągła dla $x \in]0,1[$ i $x \in]1, \infty[$

$x \in]0, \infty[\setminus \{1\}$.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

istnieją ciągi liczb wymiernych zbieżne do liczby niewymiernej. Niech $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i niech $x_n : x_n \longrightarrow y$ $x_n \in \mathbb{Q}$

wtedy $g(x_n) = 0$ cyli ~~g jest ciągła w~~

warunkiem koniecznym ciągłości funkcji g w punkcie y

jest aby $g(y) = 0$ $g(y) = \cancel{\frac{1}{y}} \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0.$

$\sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$ tzn $\frac{1}{y} = \cancel{2} n\pi$ $y = \frac{1}{n\pi}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

ponieważ sin jest ciągły oraz $y \longmapsto \frac{1}{y}$ jest ciągły poza zerem to jeśli

$y_n \longrightarrow 1/k\pi$ to $\frac{1}{y_n} \longrightarrow k\pi$ i $\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) \longrightarrow 0$

zatem g jest ciągła dla $x \in \left\{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$

Pozostałe punkty niewymierne są punktami nieciągłości. Punkty wymierne są także punktami nieciągłości, bo liczbę wymierną można przybliżać niewymiernymi i wymiernymi

0 jest także punktem nieciągłości

Ostatecznie:

g ciągła dla $x \in \left\{\frac{1}{k\pi} ; k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$