**Kolokwium z Analizy II, 29 marca 2010**

Rozwiązania

**Zadanie 1.** Niech $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ będzie zstępującym ciągiem niepustych zbiorów zwartych zawartych w przestrzeni metrycznej $(X, d)$. Udowodnić, że

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Mieli Państwo spore trudności z rozwiązaniem tego zadania. Wynikały one między innymi z nieznajomości definicji zbioru zwartego. Pojawiły się jednak dwa poprawne rozwiązania. Zamieszczam oba: **(1)** Rozwiązanie pana Arkadiusza Piwowarskiego: Zbiory $F_i$ są niepuste zatem można wybrać ciąg $(x_i)$ elementów z przestrzeni $X$ tak, aby $x_i \in F_i$. Ze względu na własność $F_{i+1} \subset F_i$ wszystkie wyrazy ciągu $(x_i)$ należą do $F_1$. Zbiór $F_1$ jest zwarty, zatem z ciągu $(x_i)$ można wybrać podciąg zbieżny $(x_{i_j})$ do elementu $x_0 \in F_1$. Pokażemy, że $x_0$ jest nie tylko elementem $F_1$, ale także wszystkich $F_i$. Ustalmy dowolnie $n \in N$. Wtedy istnieje taka liczba naturalna $k$, że $i_k > n$. Wszystkie wyrazy podciągu $x_{i_j}$ dla $j > k$ są elementami $F_n$. Zbiór $F_n$ jest domknięty, zatem granica podciągu $(x_{i_j})$ jest także elementem $F_n$. Z dowolności $n$ wynika, że $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.$\square$ **(2)** Rozwiązanie pana Huberta Krakowiaka: Zbiór zwarty charakteryzować można także w języku pokryć otwartych. Zbiór nazywamy zwarty, jeśli każde otwarte pokrycie tego zbioru zawiera podpokrycie skończone. Zbiór zwarty jest także zbiorem domkniętym, zatem każdy ze zbiorów $\mathcal{O}_i = X \setminus F_i$ jest zbiorem otwartym. Zauważmy, że

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus F_n = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Gdyby więc *(ad absurdum)* przecięcie wszystkich zbiorów $F_n$ było puste, to zbiory $\mathcal{O}_i$ stanowiłyby pokrycie otwarte przestrzeni $X$ i w szczególności także zbioru $F_1$, który jest tej przestrzeni podzbiorem. $F_1$ jest zbiorem zwartym, zatem z pokrycia $(\mathcal{O}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ można wybrać podpokrycie skończone. Oznaczmy indeksy elementów podpokrycia symbolami $i_1, i_2, \ldots i_k$ i załóżmy dla wygody, że zostały one uporządkowane rosnąco, tzn $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Otrzymujemy relację

$$F_1 \subset \mathcal{O}_{i_1} \cup \mathcal{O}_{i_2} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{i_k} = (X \setminus F_{i_1}) \cup (X \setminus F_{i_2}) \cup \cdots \cup (X \setminus F_{i_k}) = X \setminus (F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k})$$

Ze względu na to, że ciąg $F_n$ jest zstępujący, mamy równość $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} = F_{i_k}$ zatem

$$F_1 \subset X \setminus F_{i_k},$$

jednak $F_{i_k}$ jest podzbiorem $F_1$, ostatnia relacja jest więc fałszywa.$\square$

**Zadanie 2.** Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji:

$$f : \mathbb{R}^3_+ \ni (x, y, z) \longmapsto x + 4y + \frac{1}{z} + \frac{z+1}{xy} \in \mathbb{R}.$$

**Zadanie 3.** Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$g(x, y) = (x + y)e^{-(\frac{x}{2}+2y)}$$

na zbiorze $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\}$.

**Zadanie 4.** Niech $f$ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^2$ określoną na zbiorze $\mathbb{R}^2_+$. Zapisać wyrażenie

$$\mathcal{L}(f) = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

we współrzędnych $u = \sqrt{xy}$, $v = \frac{y}{x}$.

**Zadanie 5.** Znaleźć wszystkie funkcje $\varphi$ określone na $\{(x, y) : y > 0\}$ i takie, że

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$