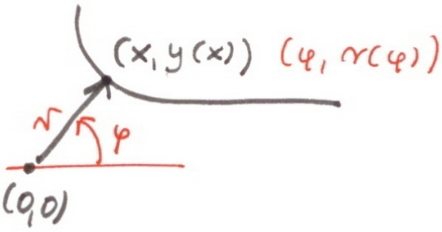
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y' - y/x}{1 + y/x \, y'}$$



Tę samą krzywą można (przynajmniej w otoczeniu niektórych punktów) opisać podając zależność $y(x)$ lub $r(\varphi)$. W treści zadanie podano wyrażenie opisujące pewną wielkość z użyciem funkcji $y(x)$. My mamy to przepisać z użyciem funkcji $r(\varphi)$. Wiemy, że

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

W tych dwóch równaniach drugie wiąże starą (y) i nową (r) zmienną zależną, zatem to równanie różniczkujemy:

$$y\Big(\underbrace{x\big(r(\varphi),\varphi\big)}_{r(\varphi)\cos\varphi}\Big) = r(\varphi)\sin\varphi \qquad \Big/ \frac{d}{d\varphi}$$

$$y_x \cdot \left(x_r \cdot r_\varphi + x_\varphi\right) = r_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi$$

W tym równaniu indeksy dolne oznaczają zmienne po jakich dane funkcje były różniczkowane

wiemy, że $x_r = \cos\varphi$ $x_\varphi = -r\sin\varphi$,
wstawiamy to do powyższego równania

$$y_x\left(r_\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi\right) = r_\varphi\sin\varphi + r\cos\varphi$$

y_x tradycyjnie oznaczamy y':

$$y' = \frac{r_\varphi\sin\varphi + r\cos\varphi}{r_\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

Powyższe wyrażenie wstawiamy w miejsce y' w wyrażeniu opisującym $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}y'} = \frac{\frac{r_\varphi\sin\varphi + r\cos\varphi}{r_\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1 + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\frac{r_\varphi\sin\varphi + r\cos\varphi}{r_\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi}} =$$

$$= \frac{\frac{r_\varphi\sin\varphi\cos\varphi + r\cos^2\varphi - r_\varphi\sin\varphi\cos\varphi + r\sin^2\varphi}{\cos\varphi(r_\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi}}{\frac{r_\varphi\cos^2\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi + r_\varphi\sin^2\varphi + r\cos\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi(r_\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi)}} =$$

$$= \frac{r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}{r_\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \frac{r}{r_\varphi}$$

Ponieważ r zależy od jednej zmiennej można pisać r' zamiast r_φ

I NIECH MI KTOŚ PRZYJDZIE NA USTNY i TEGO NIE UMIE !!!!

W ramach treningu można także przeliczyć na współrzędne biegunowe wyrażenie opisujące krzywiznę krzywej płaskiej. To jest trudniejsze, bo drugiego rzędu. Trudniejsze jednak tylko w rachunkach, bo równanie do różniczkowania jest to samo:

$$y\Big(x\big(r(\varphi),\varphi\big)\Big) = r(\varphi)\cos\varphi$$

$$K = \frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}$$

a w biegunowych:

$$K = \frac{r^2 + 2r_\varphi^2 - r r_{\varphi\varphi}}{\left(r^2 + r_\varphi^2\right)^{3/2}}$$