ANALIZA I

rozwiązanie zadania 2 z egzaminu

Szanowni Państwo, ponieważ tylko trzy lub cztery osoby poradziły sobie z całką z zadania drugiego, postanowiłam zamieścić rozwiązanie. Oto ono

Należało policzyć granicę całek oznaczonych:

$$\lim_{M\to\infty}\int_2^M \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1}{x^2}\mathsf{d}x.$$

Wskazówka sugerowała podstawienie:

$$t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

co pozwala obliczyć następujące rzeczy:

$$\mathsf{d}t=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}\mathsf{d}x=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\frac{-2}{(x-1)^2}\mathsf{d}x,$$

zatem

$$t\mathsf{d}t=\frac{-1}{(x-1)^2}\mathsf{d}x.$$

Wyznaczamy także x:

$$t^2=\frac{x+1}{x-1},\quad t^2x-t^2=x+1,\quad x=\frac{t^2+1}{t^2-1},$$

i dalej

$$x-1=\frac{2}{t^2-1}$$

co można podstawić do wzoru z różniczkami:

$$t\mathsf{d}t=\frac{-1}{\frac{4}{(t^2-1)^2}}\mathsf{d}x,\qquad \mathsf{d}x=\frac{-4t}{(t^2-1)^2}\mathsf{d}t.$$

Pamiętamy także o granicach całkowania: Jeśli $x=2$ to $t=\sqrt{3}$, jeśli $x=M$, to $t=A(M)=\sqrt{\frac{M+1}{M-1}}$. Mamy więc:

$$\int_2^M \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1}{x^2}\mathsf{d}x \quad=\quad \int_{\sqrt{3}}^{A(M)} t\frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^2}\frac{-4t}{(t^2-1)^2}\mathsf{d}t \quad=\quad -2\int_{\sqrt{3}}^{A(M)}\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\mathsf{d}t$$

Teraz dochodzimy do całki, która sprawiła Państwu najwięcej trudności. Tę całkę należy policzyć przez części

$$u(t)=t,\qquad v'(t)=\frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

$$u'(t)=1,\qquad v(t)=-\frac{1}{(t^2+1)}$$

Otrzymujemy zatem

$$-2\int_{\sqrt{3}}^{A(M)}\frac{2t^2}{(t^2-1)^2}\mathsf{d}t =$$

$$-2\left[-t\frac{1}{(t^2-1)}\bigg|_{\sqrt{3}}^{A(M)}+\int_{\sqrt{3}}^{A(M)}\frac{1}{(t^2+1)}\mathsf{d}t\right]=$$

$$\frac{2t}{(t^2+1)}\bigg|_{\sqrt{3}}^{A(M)}-2\operatorname{arc\,tg} t|_{\sqrt{3}}^{A(M)}=$$

$$\frac{2A(M)}{(A^2(M)+1)}-\frac{2\sqrt{3}}{(3+1)}-2\operatorname{arc\,tg} A(M)+2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}.$$

Gdy $M\to\infty$ to $A(M)\to 1$, zatem

$$\frac{2A(M)}{(A^2(M)+1)}-\frac{2\sqrt{3}}{(3+1)}-2\operatorname{arc\,tg} A(M)+2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}=$$

$$\frac{2}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{4}-2\operatorname{arc\,tg} 1+2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=$$

$$1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$$

Oczywiście nie jest to jedyna metoda. Ciekawą wersję alternatywną zaproponował pan Tomasz Malisz (4p) :)