Analiza I

zadania treningowe

Szanowni Państwo, poniżej znajdą Państwo zadania treningowe. Jest ich dość dużo, zwłaszcza topologicznych, gdyż te trudniej znaleźć w zbiorach zadań. Nie trzeba rozwiązywać wszystkich. Proszę je potraktować jako pretekst do przypomnienia sobie definicji i sposobów dowodzenia, które pojawiały się na wykładzie i ćwiczeniach. Koniecznie proszę rozwiązać zadanie z granicami ciągów.

Zadanie 1. Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ wyposażonej w odległość euklidesową d:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

dla dowolnego podzbioru $A \subset \mathbb{R}^2$ i $\varepsilon \geqslant 0$ oznaczamy przez A_ε zbiór

$$\{x \in X : \exists a \in A : d(x, a) \leqslant \varepsilon\}$$

Rozważmy następujące implikacje:

(D) A domknięty $\Rightarrow A_\varepsilon$ domknięty;

(O) A otwarty $\Rightarrow A_\varepsilon$ otwarty;

(Z) A zwarty $\Rightarrow A_\varepsilon$ zwarty;

(S) A spójny $\Rightarrow A_\varepsilon$ spójny.

Udowodnić, że implikacje te są prawdziwe. Uwaga: nie jest to prawda w każdej przestrzeni wyposażonej w odległość i topologię związaną z tą odległością! Implikacje dotyczące zwartości i spójności proszę potraktować jako uzupełniające, gdyż pojęć tych nie omawialiśmy na ćwiczeniach - pojawiły się tylko na wykładzie.

Zadanie 2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech A oznacza podzbiór X. Dowieść, że:

(a) $\mathsf{Fr}A = \bar{A} \setminus \mathsf{Int}A = (A \setminus \mathsf{Int}A) \cup (\bar{A} \setminus A)$;

(b) $\bar{A} = A \cup \mathsf{Fr}A$;

(c) $\mathsf{Int}A = A \setminus \mathsf{Fr}A$;

(d) $X = \mathsf{Int}A \cup \mathsf{Fr}A \cup \mathsf{Int}(X \setminus A)$;

(e) A jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy $\mathsf{Fr}A \subset A$;

(f) A jest otwarty wtedy i tylko wtedy gdy $A \cap \mathsf{Fr}A = \emptyset$.

Zadanie 3. Niech (x_n) będzie ciągiem w liczbowym. Rozważmy następujące warunki:

(C) $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geqslant N : d(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon$ $\quad$ (*Cauchy*);

(C_1) $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : d(x_n, x_N) \leqslant \varepsilon$;

(C_2) $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \exists x \in X : \forall n \geqslant N : d(x_n, x) \leqslant \varepsilon$;

(C_3) $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \varepsilon$.

Wykazać, że $(C_1) \Leftrightarrow (C) \Leftrightarrow (C_2)$, $(C) \Rightarrow (C_3)$. Znaleźć przykład pokazujący, że $(C_3) \Rightarrow (C)$ nie zachodzi.

Zadanie 4. Dowieść, że jeśli ciąg liczbowy (x_n) spełnia warunek $\exists\ C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} d(x_k, x_{k+1}) < C$, to jest ciągiem Cauchy'ego. Podać przykład liczbowego ciągu Cauchy'ego nie spełniającego powyższego warunku.

Zadanie 5. Obliczyć granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5 \cdot 3^{2n} + 4 \cdot 3^n + 3}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}-1} - \dfrac{2}{\sqrt[n]{4}-1}$;

Zadanie 6. Zbadać injektywność i surjektywność odwzorowania:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \longmapsto \frac{x}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$;

(b) $g : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \in \mathbb{R}^2$;

Wskazówka do (b): Jak wyglądają wzory na $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ w zależności od $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$?