9

Pokazaliśmy, że $e_n(x)$ jest monotoniczny i ograniczony a więc zbieżny do pewnej ~~go~~ granicy, którą oznaczmy $e(x)$

Mamy więc funkcję

$$x \longmapsto e(x)$$

oznaczamy także $e(1) = e$.

(a)

Zadanie 4

$$e(x)e(y) = e(x+y)$$

pokażemy, że $\lim \frac{e_n(x+y)}{e_n(x)e_n(y)} = 1.$

$$\frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)} = \frac{(1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n})^n}{(1+\frac{x+y}{n})^n} =$$

$$= \left[\frac{1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}+\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}}\right]^n = \left[1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right]^n \geq$$

$$\geq 1 + \frac{xy/n}{1+x+y/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

$$\frac{e_n(x+y)}{e_n(x)e_n(y)} = \left[\frac{1+\frac{x+y}{n}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}\right]^n =$$

$$= \left[1 - \frac{\frac{xy}{n^2}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}\right]^n \geq 1 - \frac{xy/n}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}$$

$$1+\frac{xy/n}{1+x+y/n} \leq \frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)} \leq \frac{(1+\frac{x}{n})(1+y/n)}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})-\frac{xy}{n}}$$

$\downarrow n\to\infty$ — 1 $\qquad$ $\downarrow n\to\infty$ — 1

z tw. o trzech ciągach

$$e(x)e(y) = e(x+y)$$

(b) wynika wprost z nier. Bernoulliego.

Av. Francia 17 · Benasque 22440 · Spain · ph: +34 974 551 475 · info@benasque.org · http://benasque.org

z własności (a)
jeśli $m \in \mathbb{N}$

$$e(m) = e(\underbrace{1+1\cdots+1}_{m}) = e(1)^m = e^m$$

$$e(-m)\,e(m) = e(0) = 1 \quad \text{czyli } e(-m) = e(m)^{-1} = e^{-m}$$

zatem dla $m \in \mathbb{Z}$ $e(m) = e^m$.

niech teraz $m = k \cdot l$

$$e(m) = e(k \cdot l) = \underbrace{e(k)\,e(k)\cdots e(k)}_{l} = (e(k))^l$$

$$e(m)^{\frac{1}{l}} = e(k)$$

$q = \frac{m}{l}$ $\quad m = q \cdot l$

$$e(\underset{\overset{\shortparallel}{m}}{q \cdot l}) = e(q)^l$$

$$e^m = e(q)^l \qquad e(q) = e^{m/l} = e^q$$

zatem dla $q \in \mathbb{Q}$ $e(q) = e^q$.

(d)

$x < y \quad x - y < 0 \quad y - x > 0$

$$e(y-x) > 1$$

$$e(x)\,(e(y-x)) = e(y)$$

$$e(y) = \underbrace{e(y-x)}_{>1}\,e(x) > e(x)$$

$$\Downarrow$$

$$e(y) > e(x).$$

Zadanie 5

(a)

$$e^x \geq 1 + x \qquad \forall x$$

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} \geq 1 - x$$ jeśli $1 - x > 0$ czyli $x < 1$

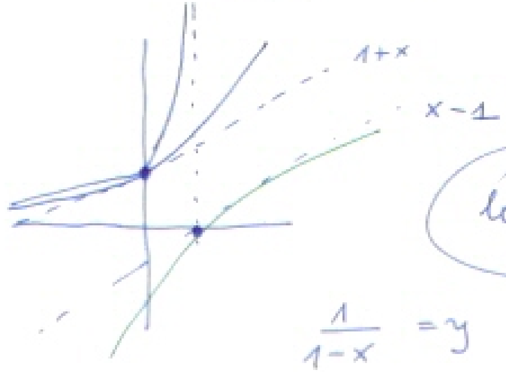
mamy $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$

ostatecznie

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

dla wszystkich x dla $x < 1$

(b) i (c)



$$\log x \leq x - 1$$

W treści zadania jest błąd.

$$\frac{1}{1-x} = y \qquad 1 = y(1-x)$$

$$1 - y = -yx$$

$$x = \frac{y-1}{y}$$

$$\log x \geq \frac{x-1}{x}$$

Zadanie 6

$$\log\left[(1+a_n)^{b_n}\right] = b_n \log(1+a_n)$$

$$\left| b_n \log(1+a_n) - b_n a_n \right| = |b_n| \left| \log(1+a_n) - a_n \right|$$

skoro $a_n \to 0$ to dla wystarczająco dużych n mamy $1+a_n>0$ zatem można to pisać

$$\log(1+a_n) \leq 1-(1-a_n) = a_n$$

tzn. $\log(1+a_n) - a_n \leq 0$

tzn. $\left|\log(1+a_n) - a_n\right| = a_n - \log(1+a_n)$

$$\log(1+a_n) \geq \frac{1+a_n-1}{1+a_n} = \frac{a_n}{1+a_n}$$

$$0 \leq \left|\log(1+a_n) - a_n\right| = a_n - \log\left(\frac{a_n}{1+a_n}\right) \leq a_n - \frac{a_n}{1+a_n} =$$

$$= a_n\left(\frac{1+a_n-1}{1+a_n}\right) = \frac{a_n^2}{1+a_n} \xrightarrow[\text{szybko}]{} 0$$

więc

$$0 \leq |b_n|\left|\log(1+a_n) - a_n\right| \leq \frac{\overbrace{b_n a_n}^{\to g}\ \overbrace{a_n}^{\to 0}}{\underbrace{1+a_n}_{1}} \longrightarrow 0.$$

tzn. $\lim\left(\log(1+a_n)^{b_n} - a_n b_n\right) = 0$

tzn $\lim \log(1+a_n)^{b_n} = \lim a_n b_n = g$

tzn. $(1+a_n)^{b_n} \longrightarrow e^{g}$.

Przykład

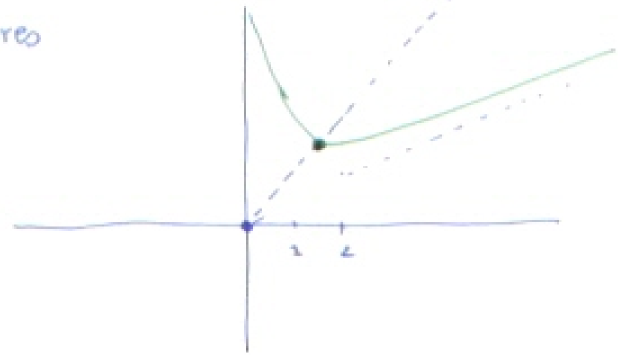
$$\left(\frac{3n+7}{3n+5}\right)^{2n+3} = \left(1 + \frac{2}{\ }\right)^{2n+3} \longrightarrow e^{4/3}$$

Zadanie 7

(a) $x_0 > 0$ $\quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$

$$f(y) = \frac{y}{2} + \frac{1}{y} = \frac{y^2+2}{2y}$$

wykres



$f(y) = y \quad \frac{y^2+2}{2y} = y \quad y^2 + 2 = 2y^2 \quad y^2 - 2 = 0 \quad y = \pm\sqrt{2}$

dla $y > 0$ $f(y) > 0$ więc $x_n > 0$

ekstremum:

$f'(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{y^2}$ wznosi dla $y = \sqrt{2}$

dla $y \in]0, \sqrt{2}[$ $\quad f(y) \in]\sqrt{2}, \infty[$

dla $y \in]\sqrt{2}, \infty[$ $\quad f(y) \in]\sqrt{2}, \infty[$

zatem dla $n > 0$ $\quad x_n \in]\sqrt{2}, \infty[$

w tym przedziale $f(y) < y$ czyli

$x_{n+1} < x_n$

ciąg malejący i ograniczony ~~do~~ przez $\sqrt{2}$ czyli

zbieżny. jeśli $x_{n} \longrightarrow \rho$ to także $x_{n+1} \longrightarrow \rho$

więc $x_{n+1} = f(x_n)$

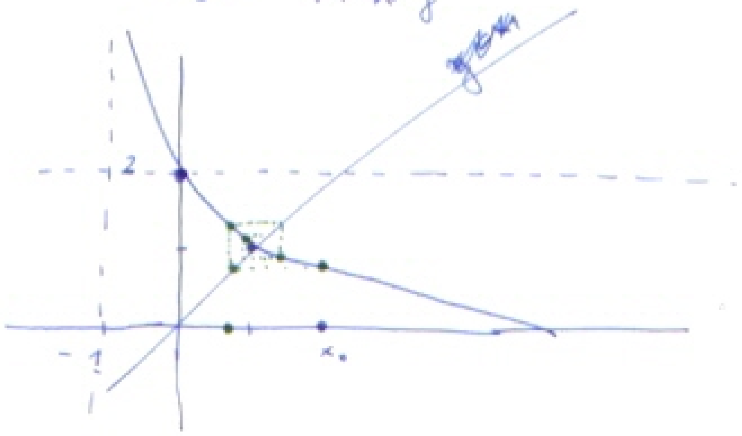
$\rho = f(\rho)$ czyli $\rho = \sqrt{2}$

15

(b) $x_0 > 1$

$$x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n}$$

$$f(y) = \frac{2}{1+y}$$



$$f(y) = y \quad \frac{2}{1+y} = y \qquad 2 = (1+y)y$$

$$y^2 + y - 2 = 0 \quad (y-1)(y+2) = 0 \qquad y = 1,\ y = -2$$

dla $y > 0$ $f(y) > 0$ zatem $x_n > 0$.

dla $y \in]0,1[$ $f(y) \in]1,2[$

dla $y \in]1,\infty[$ $f(y) \in]0,1[$

zatem dla wystarczająco dużych n $x_n \in]0,2[$
ciąg jest więc ograniczony i oscyluje wokół punktu stałego, czyli 1. Trzeba rozłożyć na podciągi parzysty i nieparzysty

$y_n = x_{2n}$

$z_n = x_{2n+1}$

okaże się że oba podciągi są monotoniczne i ograniczone oraz zbieżne do 1.
cały ciąg jest też zbieżny do 1.