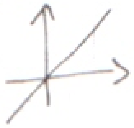
Zadanie 11 cd.

Rozkład wykresu na 6 bijekcji:

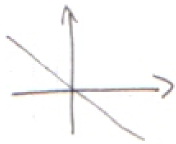
f_1 I $y = x$ tzn. $\mathbb{R} \ni x \longmapsto x \in \mathbb{R}$



identyczność
odwrotność
taka sama.

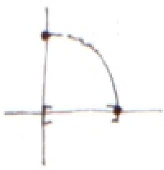
f_2 II $y = -x$: $\mathbb{R} \ni x \longmapsto -x \in \mathbb{R}$

odwrotność taka
sama



f_3 III $[0,1] \longmapsto [0,1]$
$x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$

odwrotność
taka sama



f_4 IV

$[-1,0] \longmapsto [0,1]$
$x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$

odwrotność $x \longmapsto -\sqrt{1-x^2}$

f_5 V $[0,1] \longrightarrow [-1,0]$
$x \longmapsto -\sqrt{1-x^2}$

odwrotność $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$

f_6 VI $[-1,0] \longmapsto -\sqrt{1-x^2}$ odwrotność taka sama

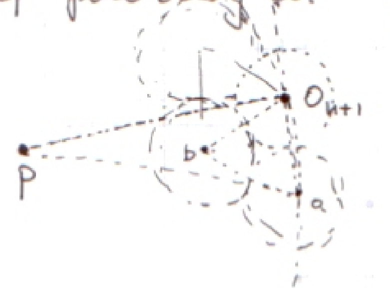
$f_1^{-1} = f_1$, $f_2^{-1} = f_2$, $f_3^{-1} = f_3$, $f_4^{-1} = f_5$, $f_5^{-1} = f_4$, $f_6^{-1} = f_6$

Av. Francia 17 · Benasque 22440 · Spain · ph: +34 974 551 475 · info@benasque.org · http://benasque.org

Zadanie 12

- dla $n \leq 4$ spełnione.
- zakładamy, że spełnione dla n i dowodzimy dla $n+1$.

Wybierzmy dowolny punkt p na płaszczyźnie i oznaczmy O_{n+1} środek tego koła, który jest najdalej położony od p.

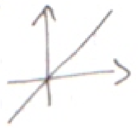


jeśli zakreślimy łuk promieniem $\overline{PO_{n+1}}$ z punktu p to wewnątrz znajdą się conajwyżej 3 środki okręgów stycznych do $K(O_{n+1})$ i takich że ich środki są bliżej p niż O_{n+1} np: a, b, c z rysunku widać, że d już musi być dalej.
Zatem $K(O_{n+1})$ rysujemy czwartym barwą.

zadanie 11 cd.

Rozkład wykresu na 6 bijekcj:

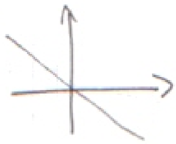
f_1 I $y=x$ tzn. $\mathbb{R} \ni x \longmapsto x \in \mathbb{R}$



identyczność
odwrotność
taka sama.

f_2 II $y=-x$: $\mathbb{R} \ni x \longmapsto -x \in \mathbb{R}$

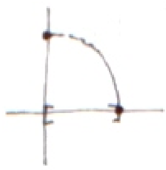
odwrotność taka
sama



f_3 III $[0,1] \longmapsto [0,1]$

$x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$

odwrotność
taka sama



f_4 IV $[-1,0] \longmapsto [0,1]$

$x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$

odwrotność $x \longmapsto -\sqrt{1-x^2}$

f_5 V $[0,1] \longrightarrow [-1,0]$

$x \longmapsto -\sqrt{1-x^2}$

odwrotność $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$

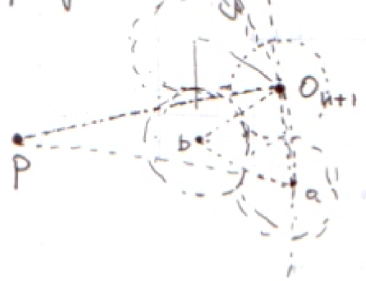
f_6 VI $[-1,0] \longmapsto -\sqrt{1-x^2}$ odwrotność taka sama

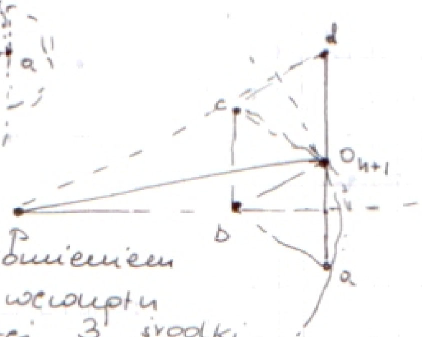
$f_1^{-1} = f_1$, $f_2^{-1} = f_2$ $f_3^{-1} = f_3$ $f_4^{-1} = f_5$, $f_5^{-1} = f_4$ $f_6^{-1} = f_6$

Zadanie 12

- dla $n \leq 4$ spełnione.
- zakładamy, że spełnione dla n i dowodzimy dla $n+1$.

Wybierzmy dowolny punkt p na płaszczyźnie i oznaczmy O_{n+1} środek tego koła, który jest najdalej położony od p.





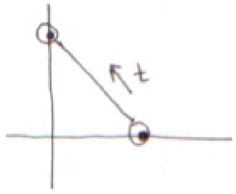
jeśli zakreślimy łuk promieniem $\overline{pO_{n+1}}$ z punktu p to wewnątrz znajdą się conajwyżej 3 środki okręgów stycznych do $K(O_{n+1})$ i takich że ich środki są bliżej p niż O_{n+1} np: a, b, c z rysunku widać, że d już musi być dalej.
Zatem $K(O_{n+1})$ rysujemy czwartą barwą.

Zadanie 9

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto \left(x+y , \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)$$

Sprawdzamy odwracalność. Niech $x+y=a$, oznacza to że punkt $(x;y)$ leży na odcinku



weźmy $t \in]0,a[$

$x = a-t$

$y = t$

wtedy $b = \overset{g}{\cancel{f}}(t) = \frac{1}{a-t} - \frac{1}{t} = \frac{2t-a}{t(a-t)}$

zbadamy funkcję $t \longmapsto g(t)$ na odcinku $]0,a[$

$\lim_{t\to 0} g(t) = -\infty$ $\lim_{t \to a} g(t) = +\infty$ pytanie, czy g jest różnowartościowa i $g(]0,a[) = \mathbb{R}$. Oznaczałoby to, że f jest surjekcją. Injektywność też wtedy wynika (jeśli g różnowartościowa). Badamy dalej g: Sprawdzamy czy $\forall R \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedno $t \in]0,a[$ takie, że $g(t) = R$

$$g(t) = \frac{2t-a}{t(a-t)} = R \rightarrow Rt^2 + (2-Ra)t - a = 0$$

$R > 0$:

istnieje jedno rozwiązanie dodatnie

$t=a$: $Ra^2 + (2-Ra)a - a =$
$= Ra^2 + 2a - Ra^2 - a =$
$= a > 0.$

$t=0$: $-a$

zatem w przedziale między $t=0$ a $t=a$ jest jedno rozwiązanie t: $g(t) = R$.

gdy $R=0$:

$2t-a=0$

$2t=a \quad t=a/2 \leftarrow$ jedeno dodatnie rozwiązanie

gdy $R<0$. $\quad R t^2+(2-Ra)t-a=0 \quad \Delta=R^2a^2+4>0$

nadal dla $t=0$ .... $-a<0$

$t=a \qquad a>0$

zatem zachodzi przypadek I i dokładnie jedno rozwiązanie jest dla $t \in]0,a[$

f jest więc bijekcją...

Odwrotność: $x(a,b)$?
$y(a,b)$?

$x=a-t \qquad b=\frac{2t-a}{t(a-t)} \quad \rightarrow \quad t=\frac{ba-2\pm\sqrt{4+a^2b^2}}{b}$

$y=t$

$x=a-\frac{ba-2\pm\sqrt{\quad}}{b}=\frac{1}{b}\left(ab-ba+2\mp\sqrt{\quad}\right)=$

$=\frac{1}{b}\left(2\pm\sqrt{4+a^2b^2}\right)$

$$x=\begin{cases} b>0 & \frac{1}{b}\left(2+\sqrt{\quad}\right) \\ b=0 & a/2 \\ b<0 & \frac{1}{b}\left(2-\sqrt{\quad}\right) \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} b>0 & \frac{1}{b}\left(-2+ab-\sqrt{\quad}\right) \\ b=0 & a/2 \\ b<0 & \frac{1}{b}\left(-2+ab+\sqrt{\quad}\right) \end{cases}$$

CENTRO DE CIENCIAS
DE BENASQUE
PEDRO PASCUAL

Zadanie 7

$$1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

$n = 1$: $1^3 \overset{?}{=} 1(2-1) = 1$ ok.

Z: wzór zachodzi dla n.
T: liczymy dla $n+1$: $\dots (n+1)^2(2(n+1)^2-1)$

$$1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 + (2n+1)^3 = n^2(2n^2-1) + (2n+1)^3$$

+ sprawdzamy rachunkiem czy się zgadza...

Zadanie 4

Aksjomaty ciała:

- $(\mathbb{K}, +)$ grupa przemienna
- $(\mathbb{K}\setminus\{0\}, \circ)$ grupa przemienna ← to jest spełnione tylko gdy p jest liczbą pierwszą *
- $0 \neq 1$
- rozdzielność mnożenia względem dodawania

* gdy $p = k \cdot l$ zbiór $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ nie jest zamknięty względem mnożenia.

Zadanie 2

Dowód a.a. załóżmy że jest skończenie wiele liczb pierwszych. Niech X oznacza zbiór liczb pierwszych i niech ten zbiór będzie skończony.
$\{x_1 \dots x_n\} = X$

oznaczmy przez $y = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ weźmy teraz $y+1$

Av. Francia 17 · Benasque 22440 · Spain · ph: +34 974 551 475 · info@benasque.org · http://benasque.org

jedynym wspólnym dzielnikiem liczb y i $y+1$ jest liczba 1 (tak jest zawsze) zatem żadna z liczb $x_1 \dots x_n$ nie dzieli $y+1$ z drugiej strony $y+1$ nie może być pierwsze, bo wszystkie liczby pierwsze to $\{x_1 \dots x_n\}$, czyli $y+1$ musi mieć jeszcze jakiś dzielnik pierwszy poza $\{x_1 \dots x_n\}$ ale to znaczy, że $\{x_1 \dots x_n\}$ nie jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych $\longrightarrow$ sprzeczność.

Zadanie 3

~~Załóżmy, że istnieje skończona liczba nieskończoności, tzn. n nierównolicznych zbiorów nieskończonych $X_1, X_2, \dots, X_n$. niech~~

~~$$X = \bigsqcup_{i=1}^{n} X_i = \{ (i, x) : i \in 1_n \ \ x \in X_i \}$$~~

~~Wykażemy, że 2^X nie jest równoliczny z żadnym ze zbiorów X_i~~

będzie inaczej

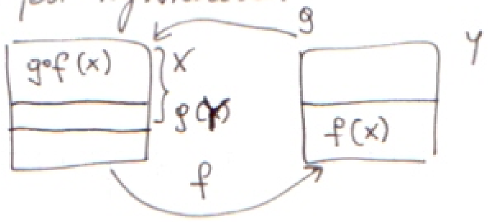
Zadanie 3

Z tw. Cantora wiemy, że X i 2^X nie są równoliczne. Hipoteza

$\mathbb{N}$ $\quad 2^{\mathbb{N}}$ $\quad 2^{2^{\mathbb{N}}}$ $\quad 2^{2^{2^{\mathbb{N}}}}$ .... tworzą ciąg parami różnych nieskończoności.

Trzeba tylko wiedzieć, że żaden z późniejszych zbiorów nie jest równoliczny z żadnym wcześniejszym.

W tym celu udowodnimy lemat: Jeśli X i Y są zbiorami i $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} X$ dwiema injekcjami to X i Y są równoliczne. Istotne jest jedynie zajmowanie się przypadkiem gdy żadne z odwzorowań f i g nie jest bijekcją, bo w przeciwnym razie odpowiedź jest trywialna.



Oznaczmy $\underbrace{g\circ f}_{F} : X \longrightarrow X$ $\quad F$ jest injekcją a więc bijekcją między X i $F(X)$

natomiast $g(Y)$ jest równoliczne z Y i mamy zawieranie

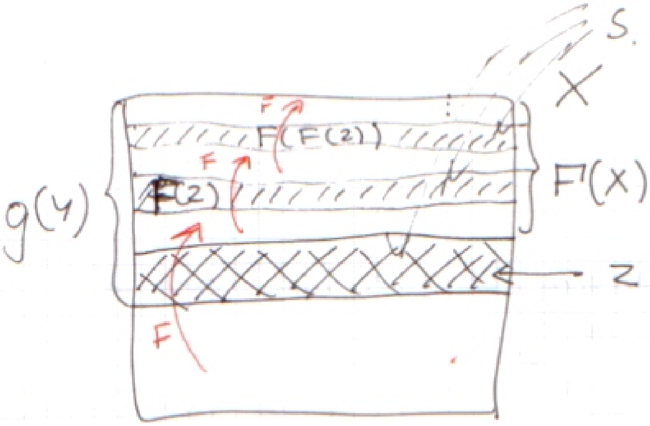
$$F(X) \subset g(Y) \subset X$$

te są równoliczne.

Trzeba wykazać że $g(Y)$ jest równoliczne z X

(a zatem, że X jest równoliczne z Y)

Av. Francia 17 · Benasque 22440 · Spain · ph: +34 974 551 475 · info@benasque.org · http://benasque.org



Konstruujemy bijekcję $G: X \longrightarrow g(Y)$

oznaczmy $Z = g(Y) \setminus F(X)$

$F(Z) \subset F(X)$ bo $Z \subset X$

$$\cancel{S = \bigcup_{n=}} \qquad S = Z \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(Z)$$

$$F^n = \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{n \text{ razy}}$$

Definiujemy

$$G(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in S \\ F(x) & \text{dla } x \notin S \end{cases}$$

Pokażemy że G jest bijekcją $X \to g(Y)$

1. że $G(X) \subset g(Y)$

$x \in S \subset g(Y)$ oraz $F(x) \in g(Y)$

zatem $\forall x \in X \;\; G(x) \in g(Y)$.

2. G działa oddzielnie na S i na $X \setminus S$.
na S jest id. a na $X \setminus S$ jest F
oba odwzorowania są injekcjami, i oba mają rozłączne obrazy, więc G jest injekcją

3. G jest na gdyż $g(Y)$ składa się z Z i $F(X)$
tzn. $g(Y) = Z \cup F(X)$ gdy

$a \in Z$ to $F(a) = a$ czyli $G^{-1}(a) = a$

gdy $a \in F(X)$ to $\exists x : F(x) = a$ zatem $\nexists$ ... czyli istnieje

zatem jeśli (dla $a \in F(X)$)

$a \in S$ to $G^{-1}(a) = a$

$a \notin S$ to $G^{-1}(a) = x$ zatem przeciwobraz zawsze istnieje.

Ostatecznie G jest bijekcją

Dowód tego lematu, czyli tw. Cantora - Bernsteina jest np. w Kuratowskim. Tak czy inaczej mamy udowodnione, że jeśli są dwie injekcje, to zbiory są równoliczne. Jeśli więc w ciągu

$$\underset{\mathbb{N}}{\underset{\cap}{X}} \hookrightarrow 2^X \hookrightarrow 2^{2^X} \hookrightarrow 2^{2^{2^X}} \ldots$$

są np. 2^X równoliczne z $2^{2^{2^X}}$ to:

$$\begin{tikzcd} 2^X \arrow[rr, leftrightarrow, "bij", "b"'] \arrow[dr, "inj"', "i_1"'] & & 2^{2^{2^X}} \\ & 2^{2^X} \arrow[ur, "inj"', "i_2"'] & \end{tikzcd}$$

to np.

injekcje

$$\begin{tikzcd} 2^{2^X} \arrow[r, "i_2"] & 2^{2^{2^X}} \arrow[l, bend left, "\underbrace{i_1 \circ b^{-1}}_{\text{injekcje}}"] \end{tikzcd}$$

to wynikałoby że

2^{2^X} równoliczne z $2^{2^{2^X}}$ co jest sprzeczne z tw. Cantora z wykładu. Czyli wszystkie te nieskończoności są różne i jest ich nieskończenie wiele