

Rozwiązanie zadania 7

Zadania na ćwiczenia pisałam, niestety, pośpiesznie przed wyjazdem na narty, na skutek czego są one napisane niestarannie (za co przepraszam). Definicja zbioru A_ε powinna wyglądać następująco:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \exists a \in A : d(x, a) \leq \varepsilon\}.$$

Zacznijmy od implikacji **(O)**: Skorzystamy z następującej definicji zbioru otwartego w przestrzeni metrycznej: *Zbiór \mathcal{O} jest otwarty jeśli dla każdego punktu $x \in \mathcal{O}$ istnieje dodatnia liczba r taka, że $\mathcal{K}(x, r) \subset \mathcal{O}$* . Jeśli $x \in A_\varepsilon$ jest taki, że istnieje dla niego punkt $a \in A$ spełniający warunek $d(x, a) < \varepsilon$ wtedy wiadomo, że

$$\mathcal{K}\left(x, \frac{\varepsilon - d(a, x)}{2}\right) \subset A_\varepsilon,$$

gdyż odległość od a do najdalej położonego punktu kuli jest

$$d(x, a) + \frac{\varepsilon - d(a, x)}{2} = \frac{\varepsilon + d(a, x)}{2} < \varepsilon$$

gdyż $d(x, a) < \varepsilon$.

Ewentualne problemy pojawiają się tylko dla punktów, dla których nie ma takiego $a \in A$ żeby $d(x, a) < \varepsilon$. Wtedy (definicja A_ε) musi istnieć a takie, że $d(x, a) = \varepsilon$. Wiemy jednak, że A jest otwarty, zatem a jest zawarty w A wraz z pewną kulą o środku w a i promieniu $\delta > 0$. W odcinku $[a, x]$ są więc punkty, należące do A i położone bliżej x niż ε . Jest to sprzeczne z określeniem punktu x . \square

Założmy teraz (implikacja **(D)**), że A jest domknięty. Aby pokazać, że A_ε jest domknięty można, na przykład, pokazać, że jego dopełnienie jest otwarte. Implikacja przyjmuje więc postać

$$A \text{ domknięty} \implies A'_\varepsilon \text{ otwarty.}$$

Z definicji zbioru A_ε wynika, że

$$A'_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \forall a \in A \ d(x, a) > \varepsilon\}.$$

Musimy pokazać, że każdy punkt powyższego zbioru należy do niego wraz z pewną kulą o niezerowym promieniu. W tym celu udowodnimy pomocniczy fakt:

$$\text{Dla } x \in A_\varepsilon \quad \inf_{a \in A} d(x, a) > \varepsilon$$

Wiadomo, że dla $a \in A$ odległość $d(x, a) > \varepsilon$, czyli *infimum* o którym mowa może być większe od ε , ale może też być równe ε . Zadanie polega więc na pokazaniu, że tak naprawdę nie może być równe. Dowód przeprowadzimy metodą *ad absurdum*: Załóżmy, że $x \in A'_\varepsilon$ jest takie, że $\inf_{a \in A} d(x, a) = \varepsilon$ Oznacza to, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje element $a_n \in A$ taki, że

$$\varepsilon < d(x, a_n) \leq \varepsilon + \frac{1}{n}$$

Ciąg a_n jest ciągiem elementów z A zawartym w zbiorze $\bar{K}(x, \varepsilon + 1)$. Zbiór ten jest ograniczony i domknięty, a więc zwarty. Ciąg (a_n) musi więc mieć punkt skupienia, który dodatkowo (z domkniętości A) zawarty jest w A . Oznaczmy ten punkt skupienia a_0 . Skoro $a_0 \in A$, to $d(x, a_0) > \varepsilon$. Z drugiej strony dla każdego $\delta > 0$ istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$ takich, że

$$d(x, a_0) \leq d(x, a_n) + d(a_n, a_0) \leq \varepsilon + \frac{1}{n} + \delta$$

Skoro δ można wziąć dowolnie małe a n dowolnie duże to ostatecznie

$$d(a_0, x) = \varepsilon$$

W szczególności oznacza to, że $x \in A_\varepsilon$, co jest sprzeczne z założeniem, że x leży w dopełnieniu zbioru A_ε .

Reszta dowodu jest łatwa, gdyż wystarczy wziąć promień

$$r = \frac{\inf_{a \in A} d(x, a) - \varepsilon}{2}$$

i wtedy $K(x, r)$ jest zawarta w całości w ε . \square

Dowód implikacji **(S)** może wyglądać na przykład tak: (*ad absurdum*) Załóżmy, że A_ε jest niespójny. Oznacza to, że istnieją zbiory $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ otwarte i rozgraniczone (to znaczy $\overline{\mathcal{O}_1} \cap \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 \cap \overline{\mathcal{O}_2} = \emptyset$) takie, że

$$A_\varepsilon \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2, \quad A_\varepsilon \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset, \quad A_\varepsilon \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset.$$

Wiadomo, że $A \subset A_\varepsilon$, zatem także $A \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. Ze spójności zbioru A wynika, że A jest w całości zawarte w \mathcal{O}_1 lub w \mathcal{O}_2 . Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że A jest w całości zawarte w \mathcal{O}_1 . Jednak wiadomo, że $A_\varepsilon \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$, zatem istnieje $x \in A_\varepsilon \setminus A$ takie, że $x \in \mathcal{O}_2$. Z definicji zbioru A_ε wynika, że istnieje $a \in A$ takie, że $d(a, x) \leq \varepsilon$. Cały odcinek metryczny $[a, x]$ należy więc do zbioru A_ε . W przypadku metryki euklidesowej, którą rozważamy, odcinek metryczny jest po prostu zwykłym odcinkiem w sensie kawałka prostej przechodzącej przez punkty a i x . Jest to oczywiście zbiór spójny jako obraz odcinka $[0, 1]$ w odwzorowaniu ciągłym

$$t \longmapsto (a_1 + t(x_1 - a_1), a_2 + t(x_2 - a_2)).$$

Z drugiej strony $[a, x] \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ oraz $[a, x] \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$, bo zawiera co najmniej punkt a , oraz $[a, x] \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$, bo zawiera co najmniej punkt x . Jest to sprzeczne ze spójnością odcinka $[a, x]$. \square

Implikacja **(Z)** jest trywialna, jeśli udowodniliśmy już **(D)**. Jeśli A jest zwarty, to jest także domknięty, wtedy A_ε też jest domknięty. Jeśli A jest zwarty, to jest także ograniczony, tzn zawiera się w pewnej kuli o środku w $x_0 \in X$ i promieniu R . W tej sytuacji A_ε zawiera się w kuli o środku x_0 i promieniu $R + \varepsilon$, jest więc także ograniczony. Zbiór domknięty i ograniczony w \mathbb{R}^2 jest zwarty. \square