Spróbujemy udowodnić, że pochodna f jest dodatnia w obszarze $]-\infty, 1[$

$$f'(x) = \frac{x-(1+x)}{x^2}\operatorname{arctg} x + \frac{1+x}{x(1+x^2)} =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\operatorname{arctg} x + \frac{1+x}{x(1+x^2)}$$

$$f'(-1) = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4} > 0$$

$$f'(1) = -\frac{\pi}{4} + 1 > 0$$

dla $x < -1$ oba człony sumy są > 0 zatem $f'(x) > 0$

wątpliwy jest przedział $]-1, 1[$ i tym przedziałem się zajmiemy:

Obserwujemy, że wzór na f', który uzyskaliśmy nie obowiązuje w $x = 0$ (zero w mianowniku) i granica jest typu $\infty - \infty$. Liczymy tę granicę z de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-(1+x^2)\operatorname{arctg} x + x(1+x)}{x^2(1+x^2)} =$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{-1} - 2x\operatorname{arctg} x + \cancel{1} + 2x}{2x + 4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2x(1-\operatorname{arctg} x)}{2x(1+2x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\operatorname{arctg} x}{1+2x^2} = 1.$$

Pochodna z definicji

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1+h}{h}\operatorname{arctg} h - 1\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)\operatorname{arctg} h - h}{h^2} \overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1+h}{1+h^2} + \operatorname{arctg} h - 1}{2h} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1+h^2 - 2h(1+h)}{(1+h^2)^2} + \frac{1}{1+h^2}}{2} =$$

4

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\cancel{1+h^2} - 2h - \cancel{2h^2} + \cancel{1+h^2}}{(1+h^2)^2} \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{2-2h}{(1+h^2)^2} \right) = 1 \text{ o.k.}$$

. f jest więc różniczkowalna także w $x=0$, $f'(0)=1$ i pochodna jest ciągła.

mamy więc

$f'(-1) = \frac{\pi}{4}$ $\quad f'(1) = 1 - \pi/4$ $\quad f'(0) = 1$ $\quad$ wszystkie wartości dodatnie

Musimy sprawdzić czy istnieje $x \in]-1,1[$: $f'(x) = 0$.

rozwiązanie:

$f'(x)=0$ tzn. $\frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} x = \frac{1+x}{x(1+x^2)}$

$$\frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} x - \frac{1+x}{x(1+x^2)} = 0$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nie zerowe}}}{\frac{1}{x^2}} \underbrace{\left(\operatorname{arctg} x - \frac{x(1+x)}{(1+x^2)} \right)}_{h(x)} = 0$$

$h(x)$ ma miejsce zerowe w $x=0$, ale nie jest to miejsce zerowe $f'(x)$. Sprawdzimy czy jest inne miejsce zerowe.

$h(-1) = -\pi/4$ $\quad h(1) = \pi/4 - 1$

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+2x)(1+x^2) - 2x^2(1+x)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{1} + \cancel{x^2} - \{ \cancel{1} + 2x + \cancel{x^2} + \cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} - \cancel{2x^2} \}}{(1+x^2)^2} =$$

$= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ $\quad h'(x) = 0$ $\quad$ zmiana znaku z $+$ na $-$ tzn maksimum.

h ma maksimum w $x=0$ i to maksimum jest $=0$.

Oznacza to, że funkcja h nie ma więcej zer!

f' jest więc dodatnia na odc. $]-1, 1[$

$e^{\pi/e} > \pi \quad \Big|^{\,e} \qquad e^{\pi} > \pi^{e}$ Zadanie 4.5

$\uparrow$ a^x jest monotoniczna

(2)

x^x badamy funkcję x^x

$x^x = e^{x\ln x}$ $\quad f(x) = e^{x\ln x} \quad f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x + 1) =$

$= x^x(\ln x + 1)$

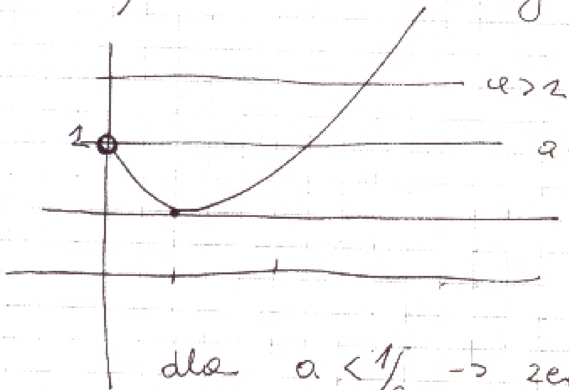
$f''(x) = x^x(\ln(x)+1)^2 + x^x\left(\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x+1)^2 + x^{x-1}.$

dla $x \to 0$ mamy $x^x = e^{x\ln x}$ $\quad x\ln x \to 0$

$$\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \to 0 \right)$$

$f'(x) = 0$ dla $\ln x = -1 \quad x = 1/e$

$f''(1/e) = e^{-e}\cdot e > 0$ czyli f ma $1/e$ minimum



$f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}} =$

$= e^{-\frac{1}{e}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{(1/e)}$

Zadanie na kartkówkę

dla $a < 1/e \to$ zero

dla $a = 1/e \to$ jedno

dla $\frac{1}{e} < a < 1 \to$ dwa

dla $a \geq 1 \to$ jedno.

(1) ~~wy~~

zbadać liczbę rozwiązań

$f(x)$ $a = x^x$

w zależności od a.

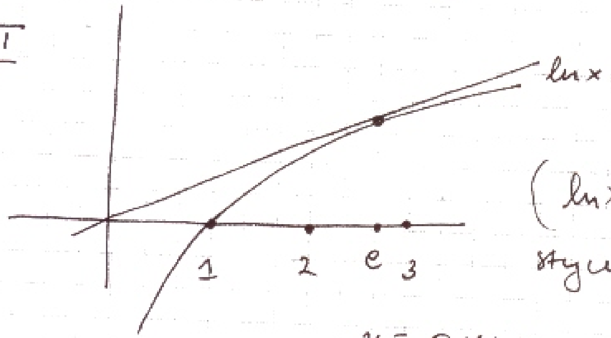
$\boxed{\lim_{x\to 0} x^x}$

minimum $f(x) = x^x$

znaleźć ekstrema f. dla $x > 0$.

(1) Co jest większe e^{π} czy π^{e} ? Zadanie 4

I



$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ piszemy równanie stycznej w $x = e$:

$y = ax + b \qquad a = (\ln x)'\big|_{x=e} = \frac{1}{e}$

b wyznaczamy z warunku

$\frac{1}{e}x + b\big|_{x=e} = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\ln e}} \qquad 1 + b = 1 \quad b = 0$

czyli styczna to $y = \frac{x}{e}$. Ponieważ $(\ln(x))'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ to wykres leży pod styczną tzn.

$$\boxed{\forall_x \ \ln x \leq \frac{x}{e}}$$

Weźmy $x = \pi$

$$\ln(\pi) < \frac{\pi}{e} \quad /\cdot e$$

$$e \ln(\pi) < \pi$$

$$\ln(\pi^{e}) < \pi = \ln e^{\pi}$$

ln jest monotoniczny więc

$$\boxed{\pi^{e} < e^{\pi}}$$

II

$e^{x} > 1 + x$ weźmy $x = \pi/e - 1$

$e^{\pi/e - 1} > 1 + \pi/e - 1$

$e^{\pi/e} \cdot \frac{1}{e} > \pi/e \quad /\cdot e \qquad e^{\pi/e} > \pi$

Zadanie 3b.

Różniczkujemy kilka razy:

$$f'(x) = (1-x)^{-1/2} + (1+x)\left(-\tfrac{1}{2}\right)(1-x)^{-3/2}(-1) =$$
$$= (1-x)^{-1/2} + \tfrac{1}{2}(1+x)(1-x)^{-3/2}$$

$$f''(x) = \tfrac{1}{2}(1-x)^{-3/2} + \tfrac{1}{2}(1-x)^{-3/2} + \frac{1\cdot 3}{2^2}(1+x)(1-x)^{-5/2} =$$
$$= (1-x)^{-3/2} + \frac{1\cdot 3}{2^2}(1+x)(1-x)^{-5/2}$$

$$f'''(x) = \tfrac{3}{2}(1-x)^{-5/2} + \frac{1\cdot 3}{2^2}(1-x)^{-5/2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}(1+x)(1-x)^{-7/2}$$
$$= \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2^2}\right)(1-x)^{-5/2} + \frac{5!!}{2^3}(1+x)(1-x)^{-7/2}$$

Obserwujemy, że każda pochodna ma postać

$$f^{(n)} = a_n(1-x)^{-(2n-1)/2} + \frac{(2n-1)!!}{2^n}(1+x)(1-x)^{-\frac{(2n+1)}{2}}$$

współczynnik a_n spełnia wzór rekurencyjny:

$$a_n = a_{n-1}\cdot\frac{(2n-3)}{2} + \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}} \quad \text{i } a_1 = 1.$$

Prosty rachunek pokazuje, że

$$a_n = \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}}\cdot n$$

tzn.

$$f^{(100)}(x) = \frac{100}{2^{99}}(197)!!\,(1-x)^{-99/2} + \frac{99!!}{2^{100}}(1+x)(1-x)^{-\frac{201}{2}}$$

$$a_n = \frac{2n-3}{2}\left(a_{n-1} + \frac{(2n-5)!!}{2^{n-2}}\right) =$$

$$= \frac{2n-3}{2}\left(\frac{2n-5}{2}\left(a_{n-2} + \frac{(2n-7)!!}{2^{n-3}}\right) + \frac{(2n-5)!!}{2^{n-2}}\right) =$$

$$= \frac{(2n-5)(2n-3)}{\ldots}\left(a_{n-2}\ \frac{(2n-7)!!}{\ldots} + \frac{(2n-7)!!}{\ldots}\right) = \ldots = \frac{(2n-3)!!}{\ldots}(a_1\ n \ldots$$