

WYKŁAD 19

Całki na iloczynach kartezjańskich.

♡ Niech (X, \mathcal{F}, μ) i (Y, \mathcal{G}, ν) będą przestrzeniami z miarą. Niech $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ będzie najmniejszym σ -ciałem podzbiorów $X \times Y$ zawierającym wszystkie zbiory postaci $A \times B$ gdzie $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$.

♡ Niech $E \subset X \times Y$. Dla $x_0 \in X$ i $y_0 \in Y$ definiujemy

$$E_{x_0} = \{y \in Y \mid (x_0, y) \in E\},$$

$$E^{y_0} = \{x \in X \mid (x, y_0) \in E\}.$$

Twierdzenie 1. Niech $Q \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Wówczas

- (1) dla każdego $x \in X$ zbiór $Q_x \in \mathcal{G}$,
- (2) dla każdego $y \in Y$ zbiór $Q^y \in \mathcal{F}$.

Dowód. Niech \mathcal{S} będzie rodziną takich podzbiorów $E \subset X \times Y$, że dla wszystkich $x \in X$ zbiory E_x należą do \mathcal{G} , a dla wszystkich $y \in Y$ zbiory E^y należą do \mathcal{F} . Zauważmy, że każdy zbiór postaci $A \times B$ dla $A \in \mathcal{F}$ i $B \in \mathcal{G}$ należy do \mathcal{S} . Ponadto

- $X \times Y \in \mathcal{S}$,
- Jeśli $E \in \mathcal{S}$, to $(E^c)_x = (E_x)^c$ i $(E^c)^y = (E^y)^c$, więc $E^c \in \mathcal{S}$,
- Jeśli $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem elementów \mathcal{S} , to $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$ i $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)^y$, więc $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$.

Wynika stąd, że \mathcal{S} jest σ -ciałem, a więc $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \subset \mathcal{S}$. □

♡ Niech f będzie funkcją na $X \times Y$. Dla ustalonego $x_0 \in X$ i $y_0 \in Y$ definiujemy funkcje

$$f_{x_0} : Y \ni y \mapsto f(x_0, y),$$

$$f^{y_0} : X \ni x \mapsto f(x, y_0).$$

Twierdzenie 2. Niech f będzie $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ -mierzalna. Wówczas

- (1) dla każdego $x \in X$ funkcja f_x jest \mathcal{G} -mierzalna,
- (2) dla każdego $y \in Y$ funkcja f^y jest \mathcal{F} -mierzalna.

Dowód. Niech $Q = \{(x, y) \mid f(x, y) > t\}$. Ponieważ f jest $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ -mierzalna, zbiór Q należy do $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Dla dowolnego $x \in X$ i $y \in Y$ mamy

$$Q_x = \{y \in Y \mid f_x(y) > t\},$$

$$Q^y = \{x \in X \mid f^y(x) > t\},$$

a te zbiory należą odpowiednio do \mathcal{G} i \mathcal{F} na mocy twierdzenia 1. □

Lemat 3. Niech \mathfrak{M} będzie najmniejszą rodziną podzbiorów $X \times Y$ taką, że

- (1) jeśli $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots$ i $Q_i \in \mathfrak{M}$ dla wszystkich i , to $\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \in \mathfrak{M}$,
- (2) jeśli $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$ i $Q_i \in \mathfrak{M}$ dla wszystkich i , to $\bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i \in \mathfrak{M}$,
- (3) skończone rozłączne sumy zbiorów postaci $A \times B$, gdzie $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$ należą do \mathfrak{M} .

Wówczas $\mathfrak{M} = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

♡ Zauważmy, że ponieważ rodzina wszystkich podzbiorów $X \times Y$ (albo np. $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$) spełnia warunki ze sformułowania lematu 3, to istnieje najmniejsza taka rodzina (równa przecięciu wszystkich rodzin spełniających te warunki).

Dowód lematu 3. Oznaczmy przez \mathcal{E} rodzinę skończonych sum rozłącznych zbiorów postaci $A \times B$, gdzie $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$. Warunek (3) mówi, że $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$. Ponadto σ -ciało $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ spełnia warunki (1)–(3), więc $\mathfrak{M} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

Pokażemy, że \mathfrak{M} jest σ -ciałem, a wtedy $\mathfrak{M} = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ z definicji $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

Oczywiście $X \times Y \in \mathcal{E}$, więc $X \times Y \in \mathfrak{M}$. Dla dowolnego $P \subset X \times Y$ definiujemy

$$\Omega(P) = \{Q \subset X \times Y \mid P \setminus Q, Q \setminus P, P \cup Q \in \mathfrak{M}\}.$$

Mamy

$$(Q \in \Omega(P)) \iff (P \in \Omega(Q)). \quad (19.1)$$

Ponadto $\Omega(P)$ jest rodziną zamkniętą na przeliczalne sumy wstępujących rodzin swoich elementów i przeliczalne przecięcia zstępujących rodzin swoich elementów (na mocy własności (1) i (2) rodziny \mathfrak{M}).

Jeśli $P, Q \in \mathcal{E}$, to $P \setminus Q, P \cap Q \in \mathcal{E}$. Jest tak, bo dla $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, $B_1, B_2 \in \mathcal{G}$ mamy

$$\begin{aligned} (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) &= (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2), \\ (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) &= ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cup ((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)). \end{aligned}$$

Wynika stąd również, że $P \cup Q = (P \setminus Q) \cup Q \in \mathcal{E}$.

Niech więc $P \in \mathcal{E}$. Wówczas $Q \in \Omega(P)$ dla wszystkich $Q \in \mathcal{E}$, a co za tym idzie

$$\mathfrak{M} \subset \Omega(P).$$

Teraz niech $Q \in \mathfrak{M}$. Na mocy (19.1) każdy $P \in \mathcal{E}$ należy do $\Omega(Q)$, a więc $\mathcal{E} \subset \Omega(Q)$. Ponieważ $\Omega(Q)$ jest zamkniętą na przeliczalne sumy wstępujących rodzin swoich elementów i przeliczalne przecięcia zstępujących rodzin swoich elementów mamy

$$\mathfrak{M} \subset \Omega(Q).$$

Jeśli przypomnimy sobie co to oznacza, to okaże się, że

- dla $P, Q \in \mathfrak{M}$ mamy $P \setminus Q \in \mathfrak{M}$,
- dla $P, Q \in \mathfrak{M}$ mamy $P \cup Q \in \mathfrak{M}$.

Oznacza to, że \mathfrak{M} jest algebrą zbiorów. Jeśli Q_1, Q_2, \dots są elementami \mathfrak{M} , to kładąc

$$P_N = \bigcup_{n=1}^N Q_n$$

otrzymujemy rodzinę $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \dots$ elementów \mathfrak{M} (bo skończone sumy należą do \mathfrak{M}). Ponieważ

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = \bigcup_{N=1}^{\infty} P_N \in \mathfrak{M}$$

na mocy (1), widzimy, że \mathfrak{M} jest σ -algebrą. \square

Twierdzenie 4. Niech (X, \mathcal{F}, μ) i (Y, \mathcal{G}, ν) będą przestrzeniami z miarami σ -skończonymi i niech $Q \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Zdefiniujemy

$$\begin{aligned} \varphi : X \ni x &\mapsto \nu(Q_x), \\ \psi : Y \ni y &\mapsto \mu(Q^y). \end{aligned}$$

Wówczas φ jest \mathcal{F} -mierzalna, ψ jest \mathcal{G} -mierzalna i

$$\int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\nu.$$

Dowód. Niech Ω będzie rodziną wszystkich zbiorów $Q \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, dla których nasze twierdzenie jest prawdziwe. Na początek udowodnimy, że rodzina ta ma następujące własności:

- (1) dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$ zbiór $A \times B \in \Omega$;
- (2) jeśli $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem elementów Ω takim, że $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots$ oraz $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, to $Q \in \Omega$;

- (3) jeśli $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem elementów Ω takim, że $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ oraz $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$,
to $Q \in \Omega$;
(4) jeśli $A \in \mathcal{F}$ i $B \in \mathcal{G}$ są takie, że $\mu(A), \nu(B) < \infty$ oraz $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem elementów Ω
takim, że

$$A \times B \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$$

oraz $Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i$, to $Q \in \Omega$.

Ad (1). Jeśli $Q = A \times B$ dla pewnych $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$, to

$$\varphi(x) = \nu(Q_x) = \nu(B)\chi_A(x) \quad \text{oraz} \quad \psi(y)\mu(Q^y) = \mu(A)\chi_B(y)$$

i od razu widać, że całki z φ i ψ są równe, a więc $A \times B \in \Omega$.

Ad (2). Niech

$$\varphi_i(x) = \nu((Q_i)_x), \quad \psi_i(y) = \mu((Q_i)^y).$$

Z przeliczalnej addytywności miar μ i ν wynika, że $\varphi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \varphi$ i $\psi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \psi$ punktowo i monotonicznie. Zatem φ i ψ są mierzalne, a z twierdzenia o zbieżności monotonicznej mamy

$$\int_X \varphi d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_X \varphi_i d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_Y \psi_i d\nu = \int_Y \psi d\nu,$$

bo zbiory Q_i należą do Ω .

Ad (3). Niech, tak jak w dowodzie (2)

$$\varphi_i(x) = \nu((Q_i)_x), \quad \psi_i(y) = \mu((Q_i)^y).$$

Mamy

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i, \quad \psi = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i,$$

a więc φ i ψ są mierzalne i mamy

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \varphi_i d\mu, \quad \int_Y \psi d\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \psi_i d\nu$$

na mocy wniosku z twierdzenia o zbieżności monotonicznej (w notatkach do poprzedniego wykładu). Oczywiście $Q \in \Omega$, bo dla każdego i

$$\int_X \varphi_i d\mu = \int_X \psi_i d\nu.$$

Ad (4). Ponownie niech

$$\varphi_i(x) = \nu((Q_i)_x), \quad \psi_i(y) = \mu((Q_i)^y).$$

Mamy

$$\varphi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \varphi \quad \text{oraz} \quad \psi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \psi \tag{19.2}$$

punktowo. Aby wykazać pierwszą z tych równości przypomnijmy sobie, że dla ustalonego x rodzina zbiorów $B \setminus (Q_i)_x$ jest wstępująca. Stąd

$$\nu(B \setminus (Q_i)_x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B \setminus (Q_i)_x\right)$$

(to jest własność przeliczalnie addytywnych funkcji zbioru). Stąd, ponieważ B ma skończoną miarę,

$$\nu((Q_i)_x) = \nu(B) - \nu(B \setminus (Q_i)_x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \nu(B) - \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B \setminus (Q_i)_x\right) = \nu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} (Q_i)_x\right).$$

Tak samo sprawdzamy drugą ze zbieżności (19.2).

Dalej

$$\varphi \leq \nu(B)\chi_A, \quad \psi \leq \mu(A)\chi_B$$

dla wszystkich i . Pamiętajmy, że $\mu(A), \nu(B) < \infty$, więc z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej mamy

$$\int_X \varphi d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_X \varphi_i d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_Y \psi_i d\nu = \int_Y \psi d\nu,$$

co pokazuje, że $\bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i \in \Omega$.

Wykazaliśmy, że Ω ma własności (1)–(4). Przechodzimy do dalszej części dowodu. Niech $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ będą rozłącznymi rodzinami mierzalnych podzbiorów X i Y o skończonych miarach takimi, że

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n, \quad Y = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Y_m$$

(przestrzenie X i Y są σ -skonczone). Dla $Q \subset X \times Y$ definiujemy

$$Q_{n,m} = Q \cap (X_n \times Y_m).$$

Rozważmy teraz rodzinę \mathfrak{M} tych elementów $Q \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, dla których $Q_{n,m} \in \Omega$ dla wszystkich n, m . Dzięki (2) rodzina ta jest zamknięta na przeliczalnie wstępujące sumy, a dzięki (4) na przeliczalnie przecięcia zstępujących. Ponadto z (1) i (3) wynika, że każdy zbiór postaci $A \times B$, gdzie $A \in \mathcal{F}$, a $B \in \mathcal{G}$ należy do \mathfrak{M} . Skończone rozłączne sumy takich zbiorów należą do \mathfrak{M} na mocy (3). Ponieważ $\mathfrak{M} \subset (\mathcal{F} \times \mathcal{G})$ z definicji, mamy na mocy lematu 3 $\mathfrak{M} = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

W szczególności dla dowolnego $Q \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ mamy $Q \in \mathfrak{M}$, czyli $Q_{n,m} \in \Omega$ dla wszystkich n, m . Ponadto Q jest sumą (rozłącznych) zbiorów $Q_{n,m}$, więc na mocy (3) mamy $Q \in \Omega$, co kończy dowód. \square

\heartsuit Niech (X, \mathcal{F}, μ) i (Y, \mathcal{G}, ν) będą przestrzeniami z miarami σ -skończonymi. Dla $Q \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ definiujemy

$$(\mu \otimes \nu)(Q) = \int_X \nu(Q_x) d\mu = \int_Y \mu(Q^y) d\nu.$$

Funkcja $\mu \otimes \nu : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \rightarrow [0, +\infty]$ jest przeliczalnie addytywna, i nazywamy ją *iloczynem tensorowym* miar μ i ν .

Aby przekonać się, że jest to funkcja przeliczalnie addytywna, weźmy $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i niech każdy zbiór $Q_n \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ oraz $Q_n \cap Q_m = \emptyset$ dla $n \neq m$. Niech $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Mamy

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \nu)(Q) &= \int_X \nu(Q_x) d\mu = \int_X \left(\int_Y \chi_Q(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_X \left(\int_Y \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{Q_n}(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_Y \chi_{Q_n}(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \left(\int_Y \chi_{Q_n}(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \otimes \nu)(Q_n), \end{aligned}$$

gdzie dwukrotnie skorzystaliśmy z wniosku z twierdzenia o zbieżności monotonicznej (w notatkach do poprzedniego wykładu).

Miara $\mu \otimes \nu$ jest także σ -skończona, bo $X \times Y = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} X_n \times Y_m$, a miary “prostokątów” $X_n \times Y_m$ są równe $\mu(X_n)\nu(Y_m) < \infty$.

Twierdzenie Fubinięgo.

Twierdzenie 5. Niech (X, \mathcal{F}, μ) i (Y, \mathcal{G}, ν) będą przestrzeniami z miarami σ -skończonymi i niech f będzie $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ -mierzalną funkcją na $X \times Y$. Wówczas

(1) Jeśli $f \geq 0$ i

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu, \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu$$

dla $x \in X, y \in Y$, to φ jest \mathcal{F} -mierzalna, ψ jest \mathcal{G} -mierzalna i

$$\int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\nu = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu). \quad (19.3)$$

(2) Jeśli $f : X \times Y \rightarrow [-\infty, +\infty]$ i

$$\int_X \tilde{\varphi} d\mu < \infty$$

(gdzie $\tilde{\varphi}(x) = \int_Y |f_x| d\nu$), to $f \in \mathcal{L}(\mu \otimes \nu)$.

(3) Jeśli $f \in \mathcal{L}(\mu \otimes \nu)$, to

- $f_x \in \mathcal{L}(\nu)$ dla prawie wszystkich $x \in X$,
- $f^y \in \mathcal{L}(\mu)$ dla prawie wszystkich $y \in Y$,
- definiując φ i ψ tak jak w punkcie (1) (są to funkcje zdefiniowane prawie wszędzie odpowiednio na X i Y) mamy $\varphi \in \mathcal{L}(\mu)$, $\psi \in \mathcal{L}(\nu)$ oraz

$$\int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\nu = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu). \quad (19.4)$$