

## WYKŁAD 2

**Stwierdzenie 1.** Niech  $T \in B(X, Y)$  i  $x \in X$ . Wówczas  $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ .

**Stwierdzenie 2.** Niech  $X, Y, Z$  będą przestrzeniami z normą i niech  $S \in B(X, Y)$ ,  $T \in B(Y, Z)$ . Wówczas  $T \circ S \in B(X, Z)$  i  $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$ .

♡ Niech  $X_1$  i  $X_2$  będą przestrzeniami z normą. Wówczas na przestrzeni  $X_1 \oplus X_2$  możemy zdefiniować normę na wiele sposobów. Sposób, który wybierzemy będzie następujący:

$$\|(x_1, x_2)\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}.$$

Jeśli  $X_1$  i  $X_2$  są przestrzeniami Banacha, to przestrzeń  $X_1 \oplus X_2$  (z normą jak wyżej) jest przestrzenią Banacha.

**Przestrzeń skończenie wymiarowe.**

**Twierdzenie 3.** Niech  $X$  będzie skończenie wymiarową przestrzenią z normą i niech  $\{e_1, \dots, e_d\}$  będzie bazą  $X$ . Wówczas izomorfizm

$$\Lambda : \mathbb{K}^d \ni \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^d \lambda_i e_i \in X \quad (2.1)$$

jest homeomorfizmem, jeśli na  $\mathbb{K}^d$  rozważymy normę

$$\left\| \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} \right\| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_d|\}.$$

*Dowód.* Odwzorowanie (2.1) jest ciągłe, gdyż

$$\begin{aligned} \left\| \Lambda \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_d \end{bmatrix} \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^d (\lambda_i - \mu_i) e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^d |\lambda_i - \mu_i| \|e_i\| \\ &\leq \max\{|\lambda_1 - \mu_1|, \dots, |\lambda_d - \mu_d|\} \sum_{i=1}^d \|e_i\|. \end{aligned}$$

Teraz przypuśćmy, że odwzorowanie odwrotne do (2.1) nie jest ciągłe. Wtedy jest ono nieciągłe w zerze. Istnieje zatem ciąg wektorów  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  z  $X$  taki, że  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , a ciąg  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wektorów z  $\mathbb{K}^d$  określony przez

$$u_n = \Lambda^{-1} x_n$$

nie jest zbieżny do 0. Innymi słowy istnieje stała  $\varepsilon > 0$  taka, że  $\|u_n\| \geq \varepsilon$  dla nieskończenie wielu  $n$ . Wybierając odpowiedni podciąg możemy założyć, że

$$\|u_n\| \geq \varepsilon \quad (2.2)$$

dla wszystkich  $n$ .

Niech  $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ . Wektory  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  należą do  $(d-1)$ -wymiarowej sfery, która jako domknięty i ograniczony podzbiór  $\mathbb{K}^d$  jest zwarta. Zatem istnieje podciąg  $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ciągu  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  taki, że

$$v_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v_\infty$$

i  $v_\infty$  należy do sfery (ma normę 1). Mamy

$$\Lambda v_n = \frac{1}{\|u_n\|} \Lambda u_n = \frac{1}{\|u_n\|} x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

gdyż ciąg  $(x_n)$  jest zbieżny do zera, a ciąg współczynników  $(\frac{1}{\|u_n\|})_{n \in \mathbb{N}}$  jest ograniczony (na mocy (2.2)).

Przechodząc do podciągów mamy

$$0 \neq v_\infty \xleftarrow[k \rightarrow \infty]{} v_{n_k} \xrightarrow[\frac{1}{\|u_{n_k}\|} x_{n_k}]{} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad (2.3)$$

ponieważ  $\Lambda$  jest ciągłe, (2.3) stoi w sprzeczności z różnowartościowością  $\Lambda$ .  $\square$

**Wniosek 4.** Niech  $(X, \|\cdot\|)$  będzie skończenie wymiarową przestrzenią z normą.

- (1) Niech  $Y$  będzie przestrzenią z normą i niech  $T : X \rightarrow Y$  będzie liniowe. Wówczas  $T$  jest ciągłe.
- (2) Niech  $\|\cdot\|'$  będzie inną normą na  $X$ . Wówczas istnieją stałe  $M, m$  takie, że

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|$$

dla wszystkich  $x \in X$ .

- (3) Każdy zbiór domknięty i ograniczony w  $X$  jest zwarty.
- (4)  $X$  jest przestrzenią Banacha.

*Dowód.* Ad (1): Niech  $\{e_1, \dots, e_d\}$  będzie bazą  $X$  i niech  $\Lambda : \mathbb{K}^d \rightarrow X$  będzie homeomorfizmem (2.1). Niech

$$\Gamma : \mathbb{K}^d \ni \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^d \lambda_i T e_i \in X$$

Tak samo jak w przypadku odwzorowania  $\Lambda$ , dowodzimy, że  $\Gamma$  jest odwzorowaniem ciągłym. Jest również jasne, że

$$T = \Gamma \circ \Lambda^{-1}.$$

Ad (2): Rozważmy  $\text{id} : X \rightarrow X$  jako odwzorowanie z  $(X, \|\cdot\|)$  do  $(X, \|\cdot\|')$ . Jest ono ciągłe na mocy punktu (1). Jest ono zatem ograniczone, i jeśli  $M = \|\text{id}\|$ , to

$$\|x\|' = \|\text{id} x\|' \leq \|\text{id}\| \|x\| = M\|x\|$$

dla wszystkich  $x \in X$ . Podobnie dowodzimy istnienia stałej  $M'$  takiej, że

$$\|x\| \leq M' \|x\|'$$

dla wszystkich  $x$ . Teraz wystarczy położyć  $m = \frac{1}{M'}$ .

Ad (3): Niech  $K \subset X$  będzie domknięty i ograniczony. Odwzorowanie  $\Lambda^{-1} : X \rightarrow \mathbb{K}^d$  jest ciągłe, a więc ograniczone. Wynika stąd, że  $\Lambda^{-1}(K)$  jest ograniczony:

$$\sup\{\|\Lambda^{-1}k\| \mid k \in K\} \leq \|\Lambda^{-1}\| \sup\{\|k\| \mid k \in K\} :$$

Jest on również domknięty, bo  $K$  jest domknięty, a  $\Lambda$  jest ciągłe.

Oznacza to, że  $\Lambda^{-1}(K)$  jest zwarty, a więc  $K = \Lambda(\Lambda^{-1}(K))$  jest zwarty (bo  $\Lambda$  jest ciągłe).

Ad (4): Niech  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem Cauchy'ego w  $X$  i niech

$$K = \overline{\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}.$$

Wówczas  $K$  jest domknięty i ograniczony, a więc zwarty (na mocy (3)). Stąd ciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ma zbieżny podciąg  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Ale jeśli ciąg Cauchy'ego ma podciąg zbieżny do pewnej granicy  $x$ , to ciąg ten jest również zbieżny do  $x$ .  $\square$

### Różniczkowanie.

♡ Od teraz wszystkie przestrzenie wektorowe będą nad ciałem  $\mathbb{R}$ .

♡ Niech  $X, Y$  będą przestrzeniami Banacha. Niech  $U \subset X$  będzie zbiorem otwartym i niech  $F : U \rightarrow Y$ . Niech  $x \in U$ . Powiemy, że odwzorowanie  $F$  jest różniczkowalne w  $x$ , jeśli istnieje operator  $T \in B(X, Y)$  taki, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} (F(x+h) - F(x) - Th) = 0.$$

♡ Niech  $X, Y$  będą przestrzeniami Banacha. Niech  $U \subset X$  będzie zbiorem otwartym i niech  $F : U \rightarrow Y$ . Dla  $T \in B(X, Y)$  i  $h \in X$  niech

$$r(x, h) = F(x + h) - F(x) - Th$$

(oczywiście  $h$  nie może być zupełnie dowolny, ale zawsze można  $h$  brać z pewnego otoczenia  $0 \in X$ ). Odwzorowanie  $F$  jest różniczkowalne w  $x$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie  $T$ , że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(x, h)\|}{\|h\|} = 0. \quad (2.4)$$

Wielkość  $r(x, h)$  nazywamy *resztą*, a własność (2.4) oznacza, że  $r(x, h)$  jest *małą wyższego rzędu niż  $h$* . Jest jasne, że wówczas także

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(x, h) = 0.$$

**Stwierdzenie 5.** *Odwzorowanie różniczkowalne w punkcie  $x$  jest ciągłe w  $x$ .*

*Dowód.* Jeśli  $F$  jest różniczkowalne w  $x$ , to

$$F(x + h) - F(x) = Th + r(x, h)$$

i  $r(x, h)$  jest małą wyższego rzędu niż  $h$ . Zatem

$$\lim_{h \rightarrow 0} (F(x + h) - F(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} Th + \lim_{h \rightarrow 0} r(x, h).$$

Prawa strona tej równości jest równa zero (bo  $T$  jest z założenia operatorem ciągłym). □

**Stwierdzenie 6.** *Niech  $F$  będzie różniczkowalne w  $x$  i niech  $T, S \in B(X, Y)$  będą takie, że*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} (F(x + h) - F(x) - Th) = 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} (F(x + h) - F(x) - Sh).$$

*Wówczas  $T = S$ .*

*Dowód.* Z założenia o różniczkowalności  $F$  w  $x$  wynika, że dla każdego ciągu wektorów  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  z przestrzeni  $X$  zbieżnego do 0 mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|h_n\|} (F(x + h_n) - F(x) - Th_n) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|h_n\|} (F(x + h_n) - F(x) - Sh_n).$$

Stąd,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|h_n\|} [(F(x + h_n) - F(x) - Th_n) - (F(x + h_n) - F(x) - Sh_n)] = 0$$

Innymi słowy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S - T) \frac{h_n}{\|h_n\|} = 0.$$

Jeśli  $S \neq T$ , to  $\|S - T\| > 0$ , więc istnieje ciąg wektorów  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  o normie 1 takich, że

$$\|Su_n - Tu_n\| > \|S - T\| - \frac{1}{n}$$

dla wszystkich  $n$ . Kładąc  $h_n = \frac{1}{n}u_n$  otrzymujemy sprzeczność. □

♡ Niech  $X, Y$  będą przestrzeniami Banacha. Niech  $U \subset X$  będzie zbiorem otwartym i niech  $F : U \rightarrow Y$ . Niech  $x \in U$  i niech  $F$  będzie różniczkowalne w  $x$ . Operator  $T \in B(X, Y)$  taki, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} (F(x + h) - F(x) - Th) = 0.$$

nazywamy *po pochodną* odwzorowania  $F$  w punkcie  $x$  i oznaczamy symbolem  $F'(x)$ . Czasami pochodną nazywa się też *po pochodną Frecheta* lub *mocną pochodną* odwzorowania  $F$ .

Powiemy, że odwzorowanie  $F$  jest różniczkowalne w  $U$ , jeśli jest różniczkowalne w każdym punkcie zbioru  $U$ . Jeśli  $F$  jest różniczkowalne w  $U$ , to pochodną  $F$  interpretujemy jako odwzorowanie

$$F' : U \ni x \longmapsto F'(x) \in B(X, Y). \quad (2.5)$$

Odwzorowanie  $F$  jest *klasy  $C^1$*  (inaczej: jest *różniczkowalne w sposób ciągły*), jeśli odwzorowanie (2.5) jest ciągłe.

**Twierdzenie 7.** Niech  $X, Y, Z$  będą przestrzeniami Banacha i niech  $U \subset X$  i  $O \subset Y$  będą zbiorami otwartymi. Niech  $x \in U$  i niech

$$\begin{aligned} F &: U \longrightarrow Y, \\ G &: O \longrightarrow Z \end{aligned}$$

będą odwzorowaniami takimi, że  $F(U) \subset O$  i  $F$  jest różniczkowalne w  $x$ , a  $G$  jest różniczkowalne w  $F(x)$ . Wówczas Odwzorowanie  $G \circ F$  jest różniczkowalne w  $x$  i

$$(G \circ F)'(x) = G'(F(x)) \circ F'(x).$$

*Dowód.* Wiemy, że

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} (F(x+h) - F(x) - F'(x)h) &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\|k\|} (G(F(x)+k) - G(F(x)) - G'(F(x))k) &= 0. \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$\begin{aligned} r_F(x, h) &= F(x+h) - F(x) - F'(x)h, \\ r_G(F(x), k) &= G(F(x)+k) - G(F(x)) - G'(F(x))k. \end{aligned}$$

Niech  $k(h) = F(x+h) - F(x)$ . Oczywiście  $k(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , a ponadto

$$\begin{aligned} G(F(x+h)) &= G(F(x) + k(h)) \\ &= G(F(x)) + G'(F(x))k(h) + r_G(F(x), k(h)) \\ &= G(F(x)) + G'(F(x)) [F(x+h) - F(x)] + r_G(F(x), k(h)) \\ &= G(F(x)) + G'(F(x)) [F'(x)h + r_F(x, h)] + r_G(F(x), k(h)) \\ &= G(F(x)) + G'(F(x))F'(x)h + \underbrace{G'(F(x))r_F(x, h) + r_G(F(x), k(h))}_{R(x, h)}. \end{aligned}$$

Wykażemy teraz, że  $R(x, h)$  jest małą wyższego rzędu niż  $h$ . Mamy

$$\frac{\|R(x, h)\|}{\|h\|} \leq \frac{1}{\|h\|} \|G'(F(x))r_F(x, h)\| + \frac{1}{\|h\|} \|r_G(F(x), k(h))\|.$$

Na początek szacujemy pierwszy składnik:

$$\frac{1}{\|h\|} \|G'(F(x))r_F(x, h)\| \leq \|G'(F(x))\| \frac{\|r_F(x, h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Natomiast drugi składnik przepisujemy tak:

$$\frac{1}{\|h\|} \|r_G(F(x), k(h))\| = \frac{\|k(h)\|}{\|h\|} \frac{\|r_G(F(x), k(h))\|}{\|k(h)\|}.$$

Skoro  $\|k(h)\| = \|F(x+h) - F(x)\| = \|F'(x)h + r_F(x, h)\|$ , mamy

$$\frac{\|k(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|F'(x)\| \|h\|}{\|h\|} + \frac{\|r_F(x, h)\|}{\|h\|},$$

czyli czynnik ten jest ograniczony. Różniczkowalność  $G$  w  $F(x)$  mówi natomiast, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r_G(F(x), k(h))\|}{\|k(h)\|} = 0.$$

□

♡ Zauważmy, że z twierdzenia 7 wynika, że złożenie odwzorowań klasy  $C^1$  jest odwzorowaniem klasy  $C^1$ . Aby to zobaczyć wykorzystujemy wzór  $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$  aby wykazać, że jeśli operator  $T$  zależy w sposób ciągły od parametru  $x$  i  $S$  także zależy w sposób ciągły od  $x$ , to  $TS$  także zależy w sposób ciągły od  $x$ :

$$\begin{aligned} \|S(x)T(x) - S(x_0)T(x_0)\| &\leq \|S(x)T(x) - S(x)T(x_0)\| + \|S(x)T(x_0) - S(x_0)T(x_0)\| \\ &\leq \|S(x)\| \|T(x) - T(x_0)\| + \|S(x) - S(x_0)\| \|T(x_0)\|. \end{aligned}$$