

## WYKŁAD 9

### Wektory styczne do $\mathbb{R}^n$ .

♡ Niech  $p \in \mathbb{R}^n$ . Rozważmy przestrzeń  $\tilde{\mathcal{E}}_p$  wektorową złożoną z funkcji zdefiniowanych na otoczeniu  $p$ , które na swojej dziedzinie są gładkie. Niech  $\mathcal{N}_p$  będzie podprzestrzenią  $\tilde{\mathcal{E}}_p$  złożoną z funkcji znikających na pewnym otoczeniu  $p$ . Wreszcie niech  $\mathcal{E}_p = \tilde{\mathcal{E}}_p / \mathcal{N}_p$ . Elementy  $\mathcal{E}_p$  nazywamy *kiekami funkcji gładkich* w punkcie  $p$ . Zauważmy, że na  $\mathcal{E}_p$  mamy naturalnie zdefiniowany iloczyn.

♡ Niech  $p \in \mathbb{R}^n$ . Wektorem stycznym do  $\mathbb{R}^n$  zaczepionym w  $p$  nazywamy odwzorowanie liniowe  $X : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathbb{R}$  takie, że

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Zbiór wektorów zaczepionych w  $p$  jest przestrzenią wektorową, którą oznaczamy symbolem  $T_p \mathbb{R}^n$ . Jeśli  $X \in T_p \mathbb{R}^n$ , to  $X$  może działać na każdy element  $\tilde{\mathcal{E}}_p$  i tak w praktyce definiujemy wektory styczne.

♡ Niech  $\gamma : ]-a, a[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie odwzorowaniem gładkim takim, że  $\gamma(0) = p$ . Dla  $f \in \tilde{\mathcal{E}}_p$  zdefiniujemy

$$\tilde{X}(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)).$$

Ponieważ dla każdego  $f \in \mathcal{N}_p$  mamy  $\tilde{X}(f) = 0$ , istnieje dokładnie jeden funkcjonal liniowy  $X$  na  $\mathcal{E}_p$  taki, że  $X([f]) = \tilde{X}(f)$  dla wszystkich  $f \in \tilde{\mathcal{E}}_p$ . Łatwo sprawdzamy, że  $X \in T_p \mathbb{R}^n$ . Wektor taki nazywamy *wektorem stycznym* do krzywej  $\gamma$ .

♡ Z reguły Leibniza natychmiast wynika, że każdy wektor  $X \in T_p \mathbb{R}^n$  ma wartość 0 na dowolnej funkcji stałej na otoczeniu  $p$ .

**Twierdzenie 1.** Niech  $f$  będzie funkcją gładką na otoczeniu  $p \in \mathbb{R}^n$ . Wówczas istnieją funkcje  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  gładkie na otoczeniu  $p$  takie, że dla  $q$  w tym otoczeniu mamy

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^n (q_i - p_i) \varphi_i(q).$$

*Dowód.* Możemy założyć, że dziedzina funkcji  $f$  jest zbiorem wypukłym. Mamy

$$\begin{aligned} f(q) &= f(p) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p + t(q-p)) dt \\ &= f(p) + \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(p + t(q-p)) (q_i - p_i) \right) dt \\ &= f(p) + \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} f(p + t(q-p)) dt \right) (q_i - p_i), \end{aligned}$$

a więc wystarczy wziąć za  $\varphi_i$  funkcję

$$q \mapsto \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} f(p + t(q-p)) dt.$$

□

♡ Przez punkt  $p \in \mathbb{R}^n$  mamy *krzywe współrzędnościowe*:

$$\gamma_i : \mathbb{R} \ni t \mapsto p + te_i.$$

Wektory styczne do tych krzywych zaczepione w punkcie  $p$  oznaczamy (zgodnie z dotychczasową konwencją) symbolami

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$$

Łatwo sprawdzamy, że układ

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\} \quad (9.1)$$

jest liniowo niezależny: jeśli

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = 0, \quad (9.2)$$

to ewaluując (zerowy) wektor (9.2) na funkcjach

$$x_i : q \mapsto q_i$$

uzyskujemy  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ . Korzystając z poprzedniego twierdzenia pokażemy, że (9.1) jest bazą  $T_p \mathbb{R}^n$ .

**Twierdzenie 2.** Niech  $X \in T_p \mathbb{R}^n$ . Wówczas

$$X = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p.$$

*Dowód.* Niech  $f \in \tilde{\mathcal{E}}_p$ . Stosujemy  $X$  do  $f$  w postaci

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) \varphi_i \quad (9.3)$$

dostajemy (oznaczając przez  $x_i$  odpowiednią funkcję współrzędnościową)

$$\begin{aligned} X(f) &= 0 + \sum_{i=1}^n (X(x_i - p_i) \varphi_i(p) + \underbrace{(x_i(p) - p_i)}_{=0} X(\varphi_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n X(x_i) \varphi_i(p). \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że z (9.3) wynika, że

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f) = \varphi_i(p),$$

więc

$$X(f) = \sum_{i=1}^n X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f).$$

Oznacza to, że

$$X = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

gdzie  $c_i = X(x_i)$ . □

♡ Niech  $X$  będzie wektorem stycznym do  $\mathbb{R}^n$  w punkcie  $p$ . Aby znaleźć rozkład  $X$  w bazie (9.1) wystarczy ewaluować  $X$  na funkcjach współrzędnościowych  $x_1, \dots, x_n$ :

$$X = \sum_{i=1}^n X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p.$$

♡ Sparametryzowaną krzywą gładką  $\gamma : ]-a, a[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  taką, że  $\gamma(0) = p$  będziemy krótko nazywać *krzywą przez  $p$* . Niech  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  będą takimi krzywymi. Powiemy, że krzywe  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  są równoważne, jeśli dla każdego elementu  $f \in \mathcal{E}_p$  mamy

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma_1(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma_2(t)).$$

Tak więc jednej klasie równoważności krzywych odpowiada dokładnie jeden wektor  $X \in T_p \mathbb{R}^n$ .

**Stwierdzenie 3.** Niech  $X \in T_p \mathbb{R}^n$ . Wówczas istnieje krzywa  $\gamma$  przez  $p$  taka, że  $X$  jest wektorem stycznym do  $\gamma$ .

*Dowód.* Zapiszmy,  $X$  jako kombinację liniową wektorów bazowych przestrzeni  $T_p \mathbb{R}^n$ :

$$X = \sum_{i=1}^n c_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$$

i niech  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie dana wzorem

$$\gamma(t) = p + t \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

□

♡ Jak widzimy wektory styczne do  $\mathbb{R}^n$  w punkcie  $p$  możemy definiować również jako klasy równoważności krzywych przez  $p$ .

♡ Niech  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  będzie lokalnym układem współrzędnych na otwartym  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  i niech  $p \in \mathcal{O}$ . Ozaczmy przez  $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dyfhomeorfizm

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix}.$$

Definiujemy krzywą  $\gamma_i$  przez  $p$  kładąc

$$\gamma_i(t) = \Phi^{-1}(\eta_i(t)),$$

gdzie

$$\eta_i(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(p) \\ \vdots \\ \varphi_i(p) + t \\ \vdots \\ \varphi_n(p) \end{bmatrix}$$

(krzywą taką nazywamy *krzywą współrzędnościową*). Oznaczmy wektor styczny odpowiadający krzywej  $\gamma_i$  symbolem

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right|_p.$$

**Stwierdzenie 4.** Układ

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right|_p \right\} \quad (9.4)$$

jest bazą przestrzeni  $T_p \mathbb{R}^n$ .

*Dowód.* Wykażemy liniową niezależność rozważanego układu. W tym celu pokażemy, że

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right|_p (\varphi_j) = \delta_{i,j}.$$

Obliczamy korzystając ze wzoru na pochodną złożenia odwzorowań:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right|_p (\varphi_j) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_j(\gamma_i(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_j(\Phi^{-1}(\Phi(p) + te_j)) \\ &= \varphi_j'(p) (\Phi^{-1})'(\Phi(p)) e_j \\ &= \varphi_j'(p) (\Phi'(p))^{-1} e_j. \end{aligned}$$

Teraz zapiszmy pierwsze dwie pochodne z ostatniego wyrażenia w bazie standardowej:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Od razu widać, że wynikiem mnożenia tych dwóch macierzy jest  $e_i^\top$ , a stąd

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p (\varphi_j) = e_i^\top e_j = \delta_{i,j}.$$

□

♡ Zauważmy, że jeśli  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  jest lokalnym układem współrzędnych na otoczeniu punktu  $p \in \mathbb{R}^n$ , to wektor  $\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p \in T_p \mathbb{R}^n$  zależy od pozostałych funkcji  $\varphi_j$  ( $j \neq i$ ). Przykładowo dla otwartego podzbioru  $\mathbb{R}^2$  zawartego w pierwszej ćwiartce możemy rozważyć układ współrzędnych  $(x, r)$ , gdzie  $x$  jest pierwszą współrzędną kartezjańską, a  $r$  – odległością od  $(0, 0)$ . Dla  $p$  w tym zbiorze wektor  $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p$  jest zupełnie innym wektorem niż  $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p$ , jeśli rozważymy kartezjański układ współrzędnych  $(x, y)$ .

### Wektory styczne do powierzchni.

♡ Niech  $M \subset \mathbb{R}^n$  będzie  $k$ -wymiarową powierzchnią gładką i niech  $p \in M$ . Wektorem stycznym do  $M$  w punkcie  $p$  nazywamy taki wektor  $X \in T_p \mathbb{R}^n$ , że  $X(f) = 0$  dla każdej funkcji gładkiej na otoczeniu  $p$  w  $\mathbb{R}^n$  stałej na  $M$ . Zauważmy, że każdy wektor styczny do krzywej przez  $p$  zawartej w  $M$  ma tę własność.

Zbiór wektorów stycznych do  $M$  w punkcie  $p$  jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej  $T_p \mathbb{R}^n$ . Oznaczmy ją symbolem  $T_p M$ .

♡ Niech  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  będzie lokalnym układem współrzędnych na otoczeniu  $O$  punktu  $p$  takim, że  $O \cap M = \{x \mid \varphi_1(x) = \dots = \varphi_{n-k}(x) = 0\}$ . Jest jasne, że wektory

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_{n-k+1}} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \Big|_p$$

są styczne do  $M$  (odpowiadające im krzywe współrzędnościowe przebiegają przez punkty, których współrzędne  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k}$  są równe zero, a więc leżą w  $M$ ).

### Stwierdzenie 5. Wektory

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_{n-k+1}} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \Big|_p$$

tworzą bazę przestrzeni  $T_p M$ .

*Dowód.* Każdy wektor  $Y$  styczny do  $\mathbb{R}^n$  w punkcie  $p$  jest kombinacją

$$Y = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p,$$

Jeśli jest on styczny do  $M$ , to styczny do  $M$  jest również wektor

$$\sum_{i=1}^{n-k} c_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p$$

(czyli wektor  $Y$  minus kombinacja wektorów stycznych do  $M$ ). Funkcje  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k}$  są stałe na  $M$ , więc

$$\sum_{i=1}^{n-k} c_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p (\varphi_j) = 0$$

dla  $j = 1, \dots, n-k$ . Ale

$$0 = \sum_{i=1}^{n-k} c_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p (\varphi_j) = \sum_{i=1}^{n-k} c_i \delta_{i,j} = c_j.$$

Oznacza to, że wektor  $Y$  nie miał niezerowych współrzędnych przy wektorach o indeksach  $i \leq n - k$ .  $\square$

♡ Można udowodnić, że każdy wektor styczny do  $M$  w punkcie  $p$  jest wektorem stycznym do jakiejś krzywej przez  $p$  zawartej w  $M$ . Istotnie, niech  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  będzie lokalnym układem współrzędnych, takim, że  $M$  jest opisywane lokalnie jako wspólne miejsce zerowe  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k}$ . Wówczas wektor

$$Y = \sum_{i=n-k+1}^n c_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p \in T_p M$$

jest styczny do krzywej

$$\gamma(t) = \Phi^{-1} \left( \Phi(p) + t \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \right),$$

gdzie  $\Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix}$ . Krzywa ta (przynajmniej dla małych  $t$ ) leży w  $M$ .

### Działanie odwzorowania na wektory styczne.

♡ Dla dowolnego  $p \in \mathbb{R}^n$  mamy kanoniczne utożsamienie przestrzeni  $T_p \mathbb{R}^n$  z  $\mathbb{R}^n$  dane przez

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \longleftrightarrow e_i$$

( $i = 1, \dots, n$ ), gdzie  $\{e_1, \dots, e_n\}$  jest bazą standardową  $\mathbb{R}^n$ . Niech teraz  $F$  będzie różniczkowalnym odwzorowaniem zdefiniowanym na otoczeniu  $p$  o wartościach w  $\mathbb{R}^m$ . Korzystając z analogicznego utożsamienia  $T_{F(p)} \mathbb{R}^m$  z  $\mathbb{R}^m$  możemy rozważyć złożenie odwzorowań liniowych

$$T_p \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{F'(p)} \mathbb{R}^m \longrightarrow T_{F(p)} \mathbb{R}^m.$$

Odwzorowanie to nazywamy *Odwzorowaniem stycznym* do  $F$  w punkcie  $p$  i oznaczamy symbolem  $T_p F$ . Ma ono bardzo prosty opis, a mianowicie obrazem  $X \in T_p \mathbb{R}^n$  jest  $Y \in T_{F(p)} \mathbb{R}^m$  taki, że

$$Y(g) = X(g \circ F)$$

dla wszystkich  $g \in \mathcal{E}_{F(p)}$ .

Istotnie, jeśli  $X = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ , to pamiętając, że macierzą  $F'(p)$  w bazach standardowych jest macierz Jacobiego, otrzymujemy

$$Y = \sum_{i,j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) c_i \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{F(p)}.$$

Z drugiej strony

$$X(g \circ F) = \sum_i c_i \frac{\partial (g \circ F)}{\partial x_i}(p) = \sum_{i,j} c_i \frac{\partial g}{\partial x_j}(F(p)) \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) = Y(g).$$

♡ Dla wektora  $X$  reprezentowanego przez krzywą  $\gamma$  przez  $p$ , wektor  $Y$  jest reprezentowany przez krzywą  $F \circ \gamma$ .

### Ekstrema funkcji na powierzchni.

♡ Zajmiemy się teraz badaniem funkcji na powierzchniach postaci  $F^{-1}(0)$ , gdzie  $F$  jest gładkim odwzorowaniem  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , którego pochodna ma stale rząd równy  $n-k$  (wiemy już, że lokalnie każda powierzchnia ma takie przedstawienie). Niech więc  $M = F^{-1}(0)$  i niech  $f$  będzie funkcją różniczkowalną zdefiniowaną na otoczeniu  $M$  w  $\mathbb{R}^n$ . Powiemy, że  $f$  ma w punkcie  $p \in M$  *ekstremum* (minimum/maksimum) *związane* (czyli ekstremum na powierzchni  $M$ ), jeśli istnieje otoczenie  $U$  punktu  $p$  w  $\mathbb{R}^n$  takie, że dla wszystkich  $x \in U \cap M \setminus \{p\}$  mamy

$$f(x) \square f(p),$$

gdzie “ $\square$ ” oznacza “ $>$ ”, “ $\geq$ ”, “ $<$ ” lub “ $\leq$ ”. Innymi słowy istnieje otoczenie  $p$  w  $M$  takie, że na tym otoczeniu  $f$  ma wartości większe/mniejsze niż  $f(p)$ .

**Twierdzenie 6** (Metoda Lagrange’a). *Niech  $\mathcal{O}$  będzie otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^n$  i niech  $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  będzie odwzorowaniem gładkim takim, że  $\text{rk } F'(x) = n-k$  dla wszystkich  $x \in \mathcal{O}$ . Niech  $M = F^{-1}(0)$  i niech  $f$  będzie funkcją rzeczywistą zdefiniowaną na otoczeniu  $M$ . Wówczas jeśli  $f$  ma ekstremum na  $M$  w punkcie  $p \in M$ , to istnieje funkcjonal  $\Lambda$  na  $\mathbb{R}^{n-k}$  taki, że*

$$f'(p) = \Lambda \circ F'(p).$$

♡ Funkcjonał  $\Lambda$  na  $\mathbb{R}^{n-k}$  można wyrazić w bazie (sprzężonej do standardowej) jako

$$\Lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_{n-k}].$$

W kontekście twierdzenia 6, liczby  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$  nazywamy *mnożnikami Lagrange’a*.