Wykłady 3 & 4

♡ Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha i niech $T \in \mathrm{B}(X, Y)$. Wówczas T jest różniczkowalne:

$$T(x+h) - T(x) = Th$$

i jego pochodną jest T (niezależnie od punktu x — pochodna jest odwzorowaniem stałym).

Stwierdzenie 1. *Niech X, Y będę przestrzeniami Banacha i niech $U \subset X$ będzie zbiorem otwartym. Niech $F, G : U \to Y$ i niech $x_0 \in U$. Jeśli F i G są różniczkowalne w x_0, to dla każdych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ odwozorowanie $\alpha F + \beta G : U \ni x \mapsto \alpha F(x) + \beta G(x)$ jest różniczkowalne w x_0 i*

$$(\alpha F + \beta G)'(x_0) = \alpha F'(x_0) + \beta G'(x_0).$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\big\|\alpha F(x+h) + \beta G(x+h) - \alpha F(x) - \beta G(x) - \alpha F'(x_0)h - \beta G'(x_0)h\big\| \\ \le \big\|\alpha F(x+h) - \alpha F(x) - \alpha F'(x_0)h\big\| \\ + \big\|\beta G(x+h) - \beta G(x) - \beta G'(x_0)h\big\| \\ \le |\alpha|\big\|F(x+h) - F(x) - F'(x_0)h\big\| \\ + |\beta|\big\|G(x+h) - G(x) - G'(x_0)h\big\|.\end{aligned}$$

□

Przykłady odwozorwań różniczkowalnych.

♡ Niech X będzie przestrzenią Banacha. Operator $T \in \mathrm{B}(X)$ nazywamy *odwracalnym,* jeśli istnieje $S \in \mathrm{B}(X)$ taki, że $TS = ST = \mathbb{1}_X$. Operator S jest wówczas jedyny i piszemy $S = T^{-1}$. Oznaczmy przez $\mathrm{GL}(X)$ zbiór operatorów odwracalnych.

Stwierdzenie 2. *Jeśli $T \in \mathrm{B}(X)$ i $\|T\| < 1$, to $\mathbb{1} - T \in \mathrm{GL}(X)$.*

Dowód. Niech $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N-1} T^n$. Na początek pokażemy, że $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Mamy

$$\|S_{N+M} - S_N\| = \left\|\sum_{n=N}^{N+M-1} T^n\right\| \le \sum_{n=N}^{N+M-1} \|T\|^n \le \sum_{n=N}^{\infty} \|T\|^n = \frac{\|T\|^N}{1 - \|T\|} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

co pokazuje, że $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Niech S będzie jego granicą. Wówczas

$$S(\mathbb{1} - T) = \lim_{N\to\infty} S_N(\mathbb{1} - T) = \lim_{N\to\infty}(\mathbb{1} - T^N) = \mathbb{1} - \lim_{N\to\infty} T^N = \mathbb{1},$$

bo $\lim\limits_{N\to\infty} \|T^N\| \le \lim\limits_{N\to\infty} \|T\|^N = 0$. Podobnie pokazujemy, że $(\mathbb{1} - T)S = \mathbb{1}$. Innymi słowy $S = (\mathbb{1} - T)^{-1}$. □

Stwierdzenie 3. *Niech $R \in \mathrm{B}(X)$, a $S \in \mathrm{GL}(X)$. Jeśli $\big\|R - S\big\| < \|S^{-1}\|^{-1}$, to $R \in \mathrm{GL}(X)$.*

Dowód. Nierówność $\|R - S\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}$ daje nam oszacowanie

$$\big\|S^{-1}(S - R)\| \le \|S^{-1}\|\|S - R\| < 1,$$

a więc $\big(\mathbb{1} - S^{-1}(S - R)\big) \in \mathrm{GL}(X)$. Niech

$$T = \big(\mathbb{1} - S^{-1}(S - R)\big)^{-1} S^{-1}.$$

Mamy

$$\mathbb{1} = T \cdot S\big(\mathbb{1} - S^{-1}(S - R)\big) = TS - TS + TR = TR$$

oraz

$$\mathbb{1} = S\big(\mathbb{1} - S^{-1}(S - R)\big) \cdot T = ST - ST + RT = RT.$$

Oznacza to, że $T = R^{-1}$. □

Wniosek 4. *Zbiór $\mathrm{GL}(X)$ jest otwarty.*

Wniosek 5. *Odwzorowanie $\mathrm{GL}(X) \ni S \mapsto S^{-1} \in \mathrm{GL}(X)$ jest różniczkowalne.*

Dowód. Weźmy dowolny $S \in \mathrm{GL}(X)$. Dla $h \in \mathrm{B}(X)$ o małej normie rozważmy $R = S + h$. Z dowodu stwierdzenia 3 wiemy, że

$$R^{-1} = \big(\mathbb{1} - S^{-1}(S - R)\big)^{-1} S^{-1} = (\mathbb{1} + S^{-1}h)^{-1} S^{-1}.$$

Ten ostatni operator możemy tak jak w dowodzie stwierdzenia 2 zapisać jako

$$(\mathbb{1} + S^{-1}h)^{-1} S^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (S^{-1}h)^n S^{-1}$$

Stąd

$$(S + h)^{-1} - S^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (S^{-1}h)^n S^{-1} = -S^{-1}hS^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (S^{-1}h)^n S^{-1}.$$

Odwzorowanie $h \mapsto -S^{-1}hS^{-1}$ jest liniowe i ciągłe (jego norma jest równa $\|S^{-2}\|$) i łatwo sprawdzamy, że szereg po prawej stronie jest małą wyższego rzędu niż h:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\|h\|}\left\|\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (S^{-1}h)^n S^{-1}\right\| &\leq \tfrac{1}{\|h\|} \sum_{n=2}^{\infty} \|S^{-1}h\|^n \|S^{-1}\| \\
&\leq \tfrac{1}{\|h\|} \sum_{n=2}^{\infty} \|S^{-1}\|^{n+1} \|h\|^n \\
&\leq \|h\| \|S^{-1}\|^3 \sum_{n=0}^{\infty} \|S^{-1}\|^n \|h\|^n
\end{aligned}$$

(jak widać dla zbieżności szeregu wystarczy $\|h\| < \|S^{-1}\|^{-1}$). □

♡ Widzimy z dowodu wniosku 5, że pochodna odwzorowania $S \mapsto S^{-1}$ w punkcie $S_0 \in \mathrm{GL}(X)$ jest równa odwzorowaniu liniowemu $X \ni h \mapsto (-S_0^{-1}hS_0^{-1}) \in X$. Stąd już łatwo wynika, że odwzorowanie $S \mapsto S^{-1}$ jest klasy C^1.

♡ Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha. Załóżmy, że X i Y są izomorficzne (czyli istnieje liniowy izomorfizm $X \to Y$, który jest *ograniczony*). Wówczas tak samo jak powyżej pokazujemy, że zbiór izomorfizmów $X \to Y$ jest otwarty. Dla każdego izomorfizmu $T : X \to Y$ odwzorowanie odwrotne także jest (ograniczonym) izomorfizmem (to nie jest banalne — wynika np. z *twierdzenia o wykresie domkniętym*). Nietrudno pokazać, że odwzorowanie przyporządkowujące izomorfizmowi $T \in \mathrm{B}(X, Y)$ izomorfizm $T^{-1} \in \mathrm{B}(Y, X)$ jest klasy C^1.

Odwzorowania dwuliniowe.

Twierdzenie 6. *Niech X, Y, Z będą przestrzeniami z normą i niech $\Phi : X \oplus Y \to Z$ będzie odwzorowaniem dwuliniowym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(1) *Odwzorowanie Φ jest ciągłe,*
(2) *Odwzorowanie Φ jest ciągłe w $(0, 0)$,*
(3) *istnieje stała M taka, że*
$$\big\|\Phi(x, y)\big\| \leq M\|x\|\|y\|.$$

Ponadto, jeśli X lub Y jest przestrzenią Banacha, to warunki (1)–(3) są równoważne następującemu

(4) *dla każdego $x \in X$ odwzorowanie $Y \ni y \mapsto \Phi(x, y) \in Z$ jest ciągłe i dla każdego $y \in Y$ odwzorowanie $X \ni x \mapsto \Phi(x, y) \in Z$ jest ciągłe.*

Dowód równoważności (1)–(3). (2)⇒(3) dowodzimy niewprost: jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją wektory x_n i y_n takie, że $\big\|\Phi(x_n, y_n)\big\| > n^2\|x_n\|\|y_n\|$, to normując x_n i y_n możemy założyć, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją $x_n \in X$ i $y_n \in Y$ o normie 1 i takie, że $\big\|\Phi(x_n, y_n)\big\| > n^2$. Niech $u_n = \frac{x_n}{\sqrt{\|\Phi(x_n, y_n)\|}}$ i $v_n = \frac{y_n}{\sqrt{\|\Phi(x_n, y_n)\|}}$. Jest jasne, że $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \in X$ i $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \in Y$, czyli $(u_n, v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \in X \oplus Y$. Ale

$$\big\|\Phi(u_n, v_n)\big\| = 1.$$

To pokazuje, że Φ nie jest ciągłe w punkcie $(0,0)$.

(3)$\Rightarrow$(1): Niech $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_\infty, y_\infty)$. Wówczas

$$\begin{aligned}\Phi(x_n, y_n) - \Phi(x_\infty, y_\infty) &= \Phi(x_n, y_n) - \Phi(x_n, y_\infty) + \Phi(x_n, y_\infty) - \Phi(x_\infty, y_\infty)\\ &= \Phi(x_n, y_\infty - y_n) + \Phi(x_n - x_\infty, y_\infty),\end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned}\big\|\Phi(x_n, y_n) - \Phi(x_\infty, y_\infty)\big\| &\leq \big\|\Phi(x_n, y_\infty - y_n)\big\| + \big\|\Phi(x_n - x_\infty, y_\infty)\big\|\\ &\leq M\|x_n\|\|y_\infty - y_n\| + M\|x_n - x_\infty\|\|y_\infty\|\\ &\leq M \sup_{m\in\mathbb{N}}\big\{\|x_m\|\big\}\|y_\infty - y_n\| + M\|x_n - x_\infty\|\|y_\infty\|.\end{aligned}$$

Implikacja (1)$\Rightarrow$(2) jest oczywista. □

♡ Fakt, że z warunku (4) twierdzenia 6 wynika ograniczoność Φ jest konsekwencją sławnego *twierdznia Banacha-Steinhausa.*

♡ Najmniejszą stałą M, tj.

$$M = \sup_{\|x\|=\|y\|=1}\big\|\Phi(x,y)\big\|$$

nazywamy *normą* odwzorowania Φ i oznaczamy symbolem $\|\Phi\|$. Zbiór wszystkich odowzorowań dwuliniowych ciągłych $X \oplus Y \to Z$ oznaczamy symbolem $\mathrm{B}(X, Y; Z)$. Norma odwzorowania dwuliniowego jest normą na $\mathrm{B}(X, Y; Z)$, a jeśli Z jest przestrzenią Banacha, to $\mathrm{B}(X, Y; Z)$ jest przestrzenią Banacha.

Twierdzenie 7. *Niech X, Y, Z będą przestrzeniami Banacha i niech $\Phi : X \oplus Y \to Z$ będzie ciągłym odwzorowaniem dwuliniowym. Wówczas Φ jest różniczkowalne i*

$$\Phi'(x,y)(h,k) = \Phi(h,y) + \Phi(x,k).$$

Dowód. Mamy

$$\Phi(x+h, y+k) - \Phi(x,y) = \Phi(x,k) + \Phi(h,y) + \Phi(h,k).$$

Wyrażenie

$$X \oplus Y \ni (h,k) \longmapsto \Phi(h,y) + \Phi(x,k) \in Z$$

jest liniowe. Ponadto

$$\lim_{(h,k)\to 0}\frac{\big\|\Phi(h,k)\big\|}{\big\|(h,k)\big\|} \leq \lim_{(h,k)\to 0}\frac{\|\Phi\|\|h\|\|k\|}{\max\big\{\|h\|\|k\|\big\}} \leq \lim_{(h,k)\to 0}\frac{\|\Phi\|\big(\max\big\{\|h\|\|k\|\big\}\big)^2}{\max\big\{\|h\|\|k\|\big\}} = 0,$$

więc $\Phi(h,k)$ jest małą wyższego rzędu niż (h,k). □

Wniosek 8 (Reguła Leibnitza)**.** *Niech X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z będą przestrzeniami Banacha, a $\Phi \in \mathrm{B}(X_2, Y_2; Z)$. Niech $U \subset X_1$ i $V \subset Y_1$ będą zbiorami otwartymi i niech*

$$\begin{aligned}F :&U \longrightarrow X_2,\\ G :&V \longrightarrow Y_2.\end{aligned}$$

Niech $x_0 \in U$ i $y_0 \in V$ i niech F i G będzią różniczkowalne odpowiednio w x_0 i y_0. Wówczas odwzorowanie

$$\Lambda : U \times V \ni (x,y) \longmapsto \Phi\big(F(x), G(y)\big) \in Z$$

jest różniczkowalne w (x_0, y_0) i

$$\Lambda'(x_0,y_0)(h,k) = \Phi\big(F'(x_0)h, G(y_0)\big) + \Phi\big(F(x_0), G'(y_0)k\big) \tag{4.1}$$

Dowód. Na początek rozważmy odwzorowanie $\Gamma : U \times V \to X_2 \oplus Y_2$ dane przez

$$\Gamma(x,y) = \big(F(x), G(y)\big).$$

Jest jasne, że Γ jest różniczkowalne w punkcie (x_0, y_0), i że

$$\Gamma'(x_0,y_0)(h,k) = \big(F'(x_0)h, G'(y_0)k\big).$$

Ponadto $\Lambda = \Phi \circ \Gamma$, więc z twierdzenia o różniczkowaniu złożenia odwzorowań wiemy, że Λ jest różniczkowalne w (x_0, y_0) i

$$\Lambda'(x_0, y_0) = \Phi'\big(\Gamma(x_0, y_0)\big) \circ \Gamma'(x_0, y_0),$$

co po odpowiednich podstawieniach daje (4.1). $\square$

Pochodne cząstkowe.

♡ Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha i niech $U \subset X$ będzie zbiorem otwartym. Niech $F : U \to Y$, $x \in U$ i niech $e \in X$. Powiemy, że odwzorowanie F ma w punkcie x *pochodną kierunkową* w kierunku wektora e, jeśli istnieje granica

$$\nabla_e F(x) = \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t}\big(F(x + te) - F(x)\big).$$

Zauważmy, że jeśli F ma w x pochodną kierunkową w kierunku e, to dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ odwzorowanie F ma w x pochodną kierunkową w kierunku λe i

$$\nabla_{\lambda e} F(x) = \lambda \nabla_e F(x).$$

Stwierdzenie 9. *Jeśli F jest różniczkowalna w x, to F ma w x pochodną kierunkową w kierunku dowolnego wektora $e \in X$. Ponadto odwzorowanie $X \ni e \mapsto \nabla_e F(x) \in X$ jest liniowe i ciągłe.*

Dowód. $F(x + te) - F(x) = F'(x)te + r(x, te)$. $\square$

♡ Powiemy, że odwzorowanie F ma w punkcie x *pochodną Gateaux* lub *słabą pochodną,* jeśli dla każdego $e \in X$ odwzorowanie F ma w x pochodną kierunkową w kierunku e i odwzorowanie $X \ni e \mapsto \nabla_e F(x) \in X$ jest liniowe i ciągłe. dwzorowanie to oznaczamy wówczas symbolem $\nabla F(x)$ i nazywamy *słabą pochodną* F w punkcie x. W takiej sytuacji mówimy też, że F jest *słabo różniczkowalne* (lub *różniczkowalne w sensie Gateaux*) w punkcie x. Odwzorowanie F jest słabo różniczkowalne w zbiorze U jeśli jest ono słabo różniczkowalne w każdym punkcie zbioru U. Odwzorowanie słabo różniczkowalne w punkcie x nie musi być różniczkowalne w x (a nawet nie musi być ciągłe w x).

♡ Niech X_1, X_2, Y będą przestrzeniami Banacha i niech $V \subset X_1 \oplus X_2$ będzie zbiorem otwartym. Niech $F : V \to Y$ i niech $(x_1, x_2) \in V$. Powiemy, że odwzorowanie F ma w punkcie (x_1, x_2) *pochodną cząstkową względem* X_1, jeśli istnieje operator $T \in \mathrm{B}(X_1, Y)$ taki, że

$$\lim_{h_1 \to 0} \tfrac{1}{\|h_1\|}\big(F(x_1 + h_1, x_2) - F(x_1, x_2) - Th_1\big) = 0. \tag{4.2}$$

Odwzorowanie liniowe $T \in \mathrm{B}(X_1, Y)$ takie, że zachodzi (4.2) jest jedyne (jeśli istnieje) i oznaczamy je symbolem $F'_{X_1}(x_1, x_2)$.

Podobnie jeśli istnieje $S \in \mathrm{B}(X_2, Y)$ takie, że

$$\lim_{h_2 \to 0} \tfrac{1}{\|h_2\|}\big(F(x_1, x_2 + h_2) - F(x_1, x_2) - Sh_2\big) = 0,$$

to mówimy, że F ma w punkcie (x_1, x_2) pochodną cząstkową względem X_2 i piszemy $S = F'_{X_2}(x_1, x_2)$.

♡ Jeśli w każdym punkcie zbioru V odwzorowanie F ma pochodną cząstkową względem X_i, to mówimy, że F jest *różniczkowalne względem* X_i w zbiorze V. Jeśli odwzorowanie

$$V \ni (x_1, x_2) \longmapsto F'_{X_i}(x_1, x_2) \in \mathrm{B}(X_i, Y)$$

jest ciągłe, to mówimy, że F jest różniczkowalne względem X_i w sposób ciągły $(i = 1, 2)$.

♡ Jest jasne, że jeśli F jest różniczkowalne, to F ma pochodne cząskowe i dla $i = 1, 2$

$$F'_{X_i}(x_1, x_2) = F'(x_1, x_2) \circ \iota_{X_i},$$

gdzie ι_{X_i} jest włożeniem X_i w $X_1 \oplus X_2$. Jest też jasne, że jeśli F jest klasy C^1, to F jest różniczkowalne w sposób ciągły względem X_1 i X_2.

♡ Niech U będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ i niech $F : U \to \mathbb{R}^m$. Niech $x \in U$ i załóżmy, że F jest słabo różniczkowalne w punkcie x. Odwzorowanie F odpowiada kolekcji m funkcji n zmiennych $F_1, \dots, F_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą standardową $\mathbb{R}^n$.

$$
\begin{aligned}
\nabla_{e_k} F(x) &= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\big(F(x+te_k) - F(x)\big) \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t} \begin{bmatrix} F_1(x+te_k) - F_1(x) \\ \vdots \\ F_m(x+te_k) - F_m(x) \end{bmatrix} \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t} \begin{bmatrix} F_1(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_n) - F_1(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_n) - F_m(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lim\limits_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\big(F_1(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_n) - F_1(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)\big) \\ \vdots \\ \lim\limits_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\big(F_m(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_n) - F_m(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)\big) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k}(x) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Stąd macierzą odwzorowania $\nabla F(x)$ w bazach standardowych $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ jest

$$
\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \tag{4.3}
$$

Macierz (4.3) nazywamy *macierzą Jacobiego* odwzorowania F w punkcie x. Dla $m = n$ macierz ta jest kwadratowa, a jej wyznacznik nazywamy *jakobianem* odwzorowania F w punkcie x. Gdy $m = 1$ macierz tę nazywamy też czasem *gradientem* funkcji F.

Twierdzenie o wartości średniej.

♡ Niech X będzie przestrzenią z normą. Zbiór funkcjonałów liniowych ciągłych na X oznaczamy symbolem X'. Jest to przestrzeń Banacha z normą ($X' = \mathrm{B}(X, \mathbb{K})$). Wartość funkcjonału $\phi \in X'$ na wektorze $x \in X$ oznaczamy symbolem $\langle \phi, x \rangle$. Dla $\phi \in X'$ i $x \in X$ mamy zawsze

$$\big|\langle \phi, x \rangle\big| \leq \|\phi\| \|x\|.$$

Twierdzenie 10 (Wniosek z tw. Hahna-Banacha)**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha i niech $x \in X \setminus \{0\}$. Wówczas istnieje $\phi \in X'$ taki, że $\|\phi\| = 1$ i*

$$\|x\| = \langle \phi, x \rangle .$$

♡ W szczególności dla $x \in X$ mamy $\|x\| = \sup\limits_{\|\phi\|=1} \big|\langle \phi, x \rangle\big|$.

Twierdzenie 11 (Twierdzenie o wartości średniej)**.** *Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha i niech $U \subset X$ będzie zbiorem otwartym. Niech $F : U \to Y$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym na U. Wówczas jeśli $x \in U$ i $h \in X$ są takie, że $x + th \in U$ dla wszystkich $t \in [0, 1]$, to*

$$\big\|F(x+h) - F(x)\big\| \leq \|h\| \sup_{t\in[0,1]} \big\|F'(x+th)\big\|.$$

Dowód. Dla $\phi \in X'$ funkcja

$$[0, 1] \ni t \longmapsto \langle \phi, F(x+th) \rangle \in \mathbb{R}$$

jest ciągła i różniczkowalna na $]0, 1[$, a jej pochodna w $t \in]0, 1[$ jest równa

$$\langle \phi, F'(x+th)h \rangle$$

(funkcja ta jest złożeniem funkcji liniowej $\mathbb{R} \ni t \mapsto th \in X$, funkcji F i funkcjonału liniowego ϕ). Z twierdzenia Lagrange'a istnieje $t_\phi \in \,]0,1[$ takie, że

$$\langle \phi, F'(x+t_\phi h)h \rangle = \langle \phi, F(x+h) \rangle - \langle \phi, F(x) \rangle = \langle \phi, F(x+h) - F(x) \rangle \,.$$

Teraz

$$\begin{aligned}
\big\|F(x+h) - F(x)\big\| &= \sup_{\|\phi\|=1} \big|\langle \phi, F(x+h) - F(x) \rangle\big| \\
&= \sup_{\|\phi\|=1} \big|\langle \phi, F'(x+t_\phi h)h \rangle\big| \\
&\leq \sup_{\|\phi\|=1} \|\phi\| \big\|F'(x+t_\phi h)h\big\| \\
&\leq \sup_{\|\phi\|=1} \big\|F'(x+t_\phi h)\big\| \|h\| \\
&\leq \|h\| \sup_{t\in[0,1]} \big\|F'(x+th)\big\|.
\end{aligned}$$

$\square$