

Pytania z Analizy II
Egzamin ustny.
Semestr letni 2009/10

1. Norma i odległość w przestrzeni \mathbb{R}^N . Ich własności. Ciągi punktów przestrzeni \mathbb{R}^N i granice. Jednoznaczność granicy. Zbieżność ciągu w terminach jego współrzędnych.

2. Kule, ciągi ograniczone i twierdzenie Bolzano Weierstrassa. Ciągi Cauchy'ego. Zupełność przestrzeni \mathbb{R}^N .

3. Zbiory domknięte w \mathbb{R}^N . Definicja i przykłady. Domknięcie zbioru. Domkniętość domknięcia. "Otoczeniowa" definicja zbiorów domkniętych. Suma i część wspólna zbiorów domkniętych.

4. Kule, wnętrze zbioru i zbiory otwarte. Suma i część wspólna zbiorów otwartych. Zbiory otwarte jako sumy kul.

5. Odwzorowania ciągłe, przykłady. Odległość jako funkcja ciągła. Przeciwobraz zbioru otwartego przy odwzorowaniu ciągłym.

6. Zbiory zwarte. Funkcje ciągłe na zbiorach zwartych.

7. Pochodne cząstkowe. Funkcje i odwzorowania klasy \mathcal{C}^k .

8. Pochodna superpozycji: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

9. Macierz Jacobiego jako pochodna odwzorowania z zbioru otwartego w \mathbb{R}^N w przestrzeń \mathbb{R}^M . Pochodna superpozycji odwzorowań.

10. Rozkład $\Delta f = df + r$.

11. Równość drugich pochodnych mieszanych.

12. Algebra macierzy. Norma.

13. Twierdzenie o wartości średniej dla funkcji i odwzorowań klasy \mathcal{C}^1 . Oszacowanie $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq C\|x - y\|$.

14. Wzór Taylora dla funkcji i dla odwzorowań klasy \mathcal{C}^k .

15. Punkty stacjonarne i ekstrema lokalne funkcji.

16. Zasada Banacha.

17. Twierdzenie o lokalnej odwracalności.

18. Twierdzenie o odwzorowaniach uwikłanych.

19. Definicja powierzchni L -wymiarowej w \mathbb{R}^N .

20. Zadawanie powierzchni przy pomocy równań.

21. Ekstrema związane. Mnożniki Lagrange'a.

22. Zadawanie powierzchni przy pomocy parametryzacji.

23. Całkowanie funkcji o wartościach wektorowych. Oszacowanie całki $\int_a^b x(t) dt$

24. Elementarne metody rozwiązywania równań pierwszego rzędu. Czynniki całkujące, równania z rozdzielonymi zmiennymi.
25. Równania różniczkowe. Przykłady równań które nie mają rozwiązań globalnych i równań dla których istnieje wiele rozwiązań spełniających ten sam warunek początkowy.
26. Warunek Lipschitza. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla układów równań pierwszego rzędu.
27. Układy równań pierwszego rzędu o stałych współczynnikach. Funkcja wykładnicza z argumentem macierzowym.
28. Obliczanie funkcji wykładniczej od argumentu macierzowego.
29. Układy równań liniowych. Struktura zbioru rozwiązań. Rezolwenta i jej własności.
30. Metoda uzmienniania stałych dla układów równań liniowych pierwszego rzędu.
31. Równania wyższych rzędów a układy równań pierwszego rzędu.
32. Warunek Lipschitza. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla równań wyższych rzędów
33. Metody obniżania rzędu przydatne do rozwiązywania równań wyższych rzędów.
34. Całki pierwsze i ich zastosowania.
35. Równania liniowe wyższych rzędów. Twierdzenie Liouville'a
36. Wzór $\det e^A = e^{\text{Tr}A}$. Wyznacznik rezolwenty układu równań liniowych.
37. Metoda uzmienniania stałych dla równań wyższych rzędów.
38. Recepta na rozwiązywanie równań liniowych o stałych współczynnikach.
39. Zbiory (nie) przeliczalne. Przykłady.
40. Przeliczalny zbiór kul otwartych o wymiernych promieniach i *wymiernych* środkach jako baza topologii w \mathbb{R}^N . Kiedy kule są kostkami?
41. Pokrycia otwarte zbiorów w \mathbb{R}^N . *Pokryciowa* definicja zwartości zbioru.
42. Kostki (prostokądowniki) w \mathbb{R}^N . Podziały i podpodziały kostek. Objętość kostki. Addytywność objętości ze względu na podział kostki.
43. Zbiory miary zero w sensie Riemanna i Lebesgue'a. Przykłady. Hiperpowierzchnia jako zbiór miary zero.
44. Sumy górne, dolne i wypunktowane. Zachowanie sum przy zastąpieniu podziału podpodziałem. Całki górne i dolne. Funkcje całkowne.
45. Całka górna jako granica sum górnych; całka jako granica sum wypunktowanych.
46. Elementarne własności całki (całka jako funkcjonal liniowy, ciągły, addytywny ze względu na podział kostki, po której całkujemy).
47. Wariacja (wahanie) funkcji na zbiorze i w punkcie. Wariacja funkcji ciągłej.
48. Całkowność funkcji ciągłych i nie tylko. Całki po obszarach nieprostokądowniennych.

49. Twierdzenie Fubini'ego.
50. Rozstawianie granic całkowania. Przykłady
51. Zamiana zmiennych w całkach wielowymiarowych dla odwzorowań prostych.
52. Przedstawianie dowolnych gładkich bijekcji w postaci superpozycji odwzorowań prostych i permutacji zmiennych.
53. Zamiana zmiennych w całkach wielowymiarowych.